

Piotr Lacki, Anna Derlatka

ANALIZA NUMERYCZNA KONSTRUKCJI DREWNIANEJ JAKO STRUKTURY ORTOTROPOWEJ

Wprowadzenie

Jednym z najstarszych materiałów używanych w konstrukcjach inżynierskich jest drewno. Charakteryzują je właściwości ortotropowe wynikające z budowy komórkowej oraz ze sposobu, w jaki rosną. Co roku drzewo wytwarza warstwę drewna w postaci słoju. Jeden słuź to drewno wczesne powstałe wiosną oraz drewno późne powstałe latem. Materiał ten można uznać za ortotropowy z trzema głównymi kierunkami: stycznym do słoju, promieniowym i wzdłużnym.

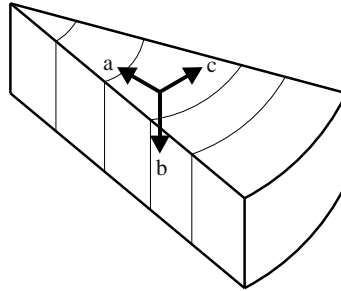
Motywacją do przeprowadzenia analizy jest możliwość badania pracy elementów konstrukcyjnych z wykorzystaniem metod numerycznych. Projektowanie według norm branżowych nie daje możliwości obserwacji zachowania konstrukcji w każdym jej punkcie. Jest to spowodowane stosowaniem wzorów oraz współczynników empirycznych, uzyskanych w wyniku badań eksperymentalnych. Metoda elementów skończonych bazuje na dyskretyzacji struktury na skończoną ilość elementów. Umożliwia poznanie stanu naprężenia w poszczególnych elementach konstrukcji.

Z przeprowadzonego porównania symulacji numerycznej oraz eksperymentalnej wg [1] wynika, iż modele komputerowe zachowania drewna są bliskie rzeczywistemu zachowaniu. Wytrzymałość drewna na ściskanie oraz rozciąganie jest zależna od wielu czynników. Dla tego samego rodzaju drewna wytrzymałość jest zależna od położenia siły względem słoju oraz włókien. Najkorzystniejszą wytrzymałość na ściskanie uzyskano, przykładając obciążenie stycznie do słoju, a największą wytrzymałość przy rozciąganiu otrzymano przez rozciąganie wzdłuż włókien [2]. W przypadku obciążenia ściskającego w kierunku promieniowym do awarii dochodzi w miejscu drewna wczesnego [3]. Szczegółową analizę ściskania drewnianych próbek przeprowadzono w [4]. Wpływ modułu Younga oraz współczynnika Poissona na wytrzymałość na ściskanie przedstawiono w [5]. Pozytcje [6, 7] analizują zachowanie drewna świerkowego pod obciążeniem, uwzględniając budowę komórkową za pomocą skaningowego mikroskopu elektronowego.

1. Model sprężysty

Drewno jest materiałem ortotropowym o wytrzymałości oraz sprężystości zależnej od wilgotności, temperatury oraz gęstości. Podejście uwzględniające wpływy wilgotnościowe oraz temperaturowe zamieszczono w [8]. Dla uproszczenia modelu obliczeniowego parametry te zostały założone jako stałe.

Na rysunku 1 pokazano cechy ortotropowe badanego materiału.



Rys. 1. Lokalne kierunki materiałowe drewna

Sprężyste zachowanie materiału jest modelowane jako materiał St. Venanta-Kirchhoffa z funkcją gęstości energii sprężystej jako:

$$\psi = \frac{1}{2} : \underline{E} : \underline{\underline{C}} : \underline{E} \quad (1)$$

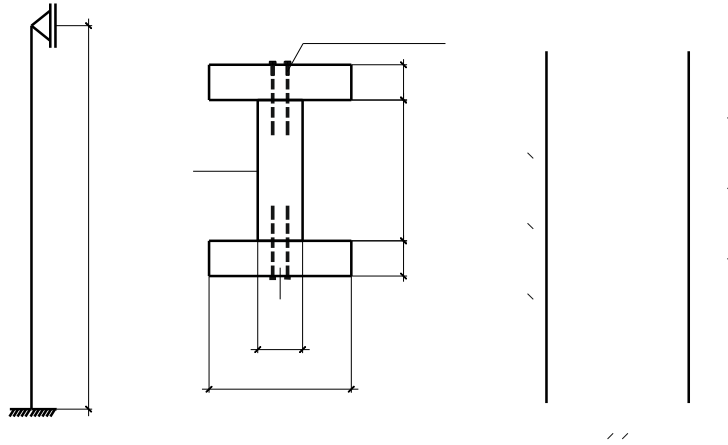
Tensor sprężystości $\underline{\underline{C}}$ jest definiowany jako moduły Younga E_a, E_b, E_c , moduły ścinania G_{ab}, G_{ac}, G_{bc} oraz współczynniki Poissona $\nu_{ab}, \nu_{ac}, \nu_{bc}$. Tensor sprężystości $\underline{\underline{C}}$ jest definiowany jako zapis macierzowy:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_a} & \frac{-\nu_{ba}}{E_b} & \frac{-\nu_{ca}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{ab}}{E_a} & \frac{1}{E_b} & \frac{-\nu_{cb}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{ac}}{E_a} & \frac{-\nu_{bc}}{E_b} & \frac{1}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{bc}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ac}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2)$$

gdzie $\underline{\underline{C}}$ odpowiada układowi współrzędnych materiałowych zamieszczonych na rysunku 1 [9].

2. Model obliczeniowy

Przedmiotem analizy jest element belkowy długości 4,00 m o przekroju dwuteowym pokazany na rysunku 2a. Przekrój uzyskano po zbiciu bali o wymiarach 63x200 mm jako środniczka oraz 50x200 mm jako półki (rys. 2b). Zastosowano gwoździe 4,2x100 mm rozmieszczone w dwóch rzędach w rozstawie poprzecznym 21 mm oraz podłużnym 100 mm, co pokazano na rysunku 3c. Warunki brzegowe to utwierdzenie pierwszego węzła skrajnego oraz odebranie możliwości przesuwu w kierunkach XZ, YZ dla drugiego węzła skrajnego.



Rys. 2. Model fizyczny belki: a) schemat statyczny belki, b) przekrój poprzeczny, c) widok rozmieszczenia gwoździ

Model obliczeń analitycznych zostały wykonane zgodnie z PN-EN 1995-1-1 [10] i [11]. Konstrukcje potraktowano jako prętowe. Uwzględniono cechy przekroju: $I_y = 7083 \text{ cm}^4$, $A = 326 \text{ cm}^2$, $i_y = 4,661 \text{ cm}$ oraz gęstość drewna $\rho = 380 \text{ kg/m}^3$ przy założonej wilgotności 12% i temperaturze 20°C. Przyjęto klasę użytkowania: I oraz klasę drewna C30.

Model numeryczny zbudowany w programie ADINA został potraktowany jako drewniany element objętościowy wraz ze stalowymi elementami belkowymi. Uwzględniono ortotropową i izotropową budowę drewna oraz izotropową budowę gwoździ. Przyjęto parametry materiałowe dla ortotropowej struktury drewna:

$$E_a = 820 \text{ MPa}, \quad G_{ab} = 40 \text{ MPa}, \quad \nu_{ab} = 0,24,$$

$$E_b = 430 \text{ MPa}, \quad G_{ac} = 730 \text{ MPa}, \quad \nu_{ac} = 0,45,$$

$$E_c = 13\,200 \text{ MPa}, \quad G_{bc} = 660 \text{ MPa}, \quad \nu_{bc} = 0,45$$

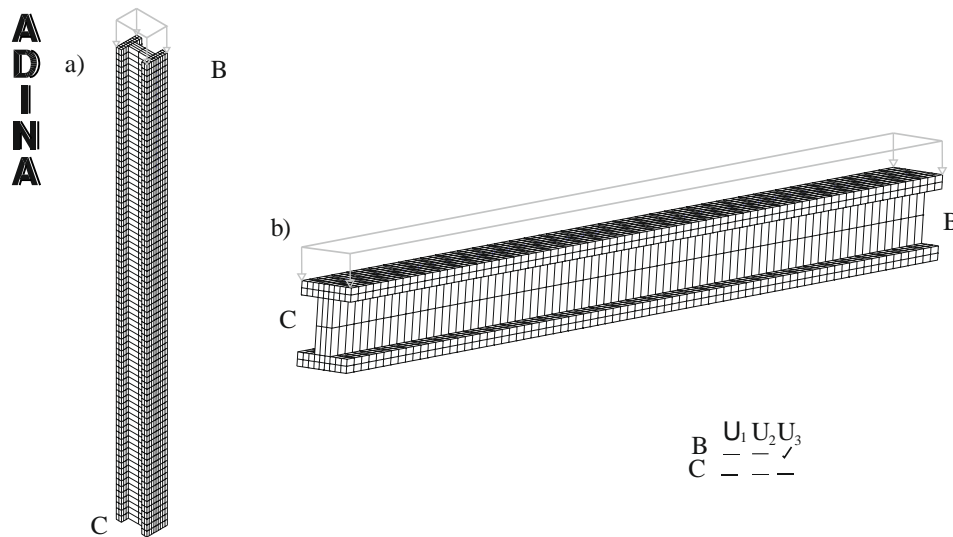
dla wilgotności i temperatury zgodnej z założeniami obliczeń analitycznych. Parametry dla izotropowej struktury drewna przyjęto zgodnie z następującymi: $E = 8 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 380 \text{ kg/m}^3$. Dla stali przyjęto parametry: $E = 205 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ [10].

Podstawowa charakterystyka modeli:

- model objętościowy: liczba węzłów 33 658
wielkość elementu siatki środnika: 21x50 mm
wielkość elementu siatki półki: 21x25 oraz 23x25 mm
- model belkowy: liczba węzłów 471
liczba podziału pojedynczego elementu 2

Analizę przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążeniowych: osiowego ściskania elementu oraz zginania siłą poprzeczną pokazanych na rysunku 3. Uwzględniono ciężar własny konstrukcji.

W obliczeniach analitycznych obciążenie zostało przyłożone punktowo oraz liniowo. W modelu numerycznym obciążenie rozłożono równomiernie na powierzchni.



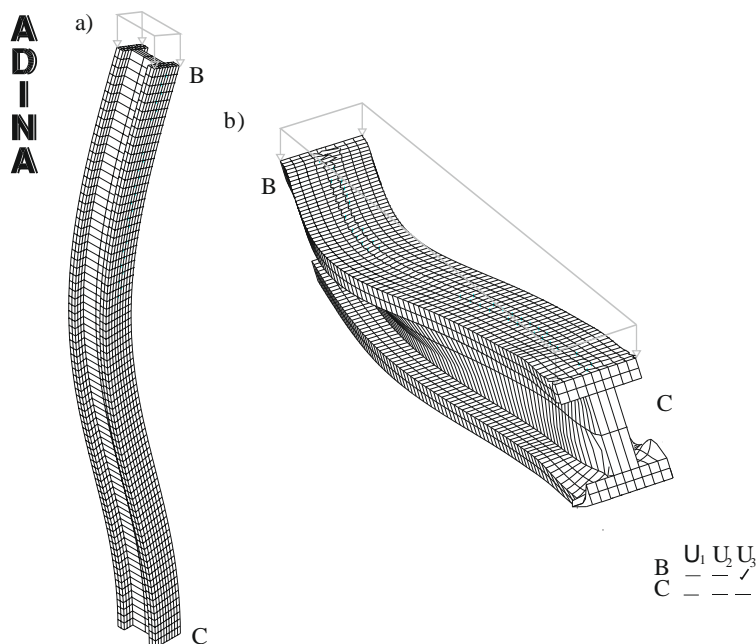
Rys. 3. Przypadki obciążeń elementów: a) ściskanie osiowe, b) zginanie siłą poprzeczną

3. Analiza obliczeniowa

Na podstawie obliczeń wg PN-EN 1995-1-1 [11] maksymalna siła ściskająca, przy której słup nie traci stateczności, wynosi 182,5 kN. Działa ona na pole powierzchni 326 cm², czyli po sprowadzeniu do obciążenia powierzchniowego wynosi 5,598 MPa. Według modelu numerycznego dla materiału izotropowego jest ona równa 21,57 MPa. Natomiast traktując model jako ortotropowy, maksymalna siła wynosi 33,00 MPa. Na rysunku 4a pokazano deformację słupa.

W przypadku elementu zginanego obliczonego na podstawie PN-EN 1995-1-1 [11], maksymalna siła, przy której element belkowy nie traci stateczności, wynosi 9 kN/m na powierzchni 8000 cm², czyli 0,45 MPa. Według modelu numerycznego dla materiału izotropowego wynosi ona 1,5 MPa. Dla materiału ortotropowego wynosi ona 1,2 MPa. Deformację belki pokazano na rysunku 4b.

W tabeli 1 zestawiono wyniki analizy dla obu rozpatrywanych elementów.



Rys. 4. Deformacja elementu: a) wyboczenie słupa b) zwichrzenie belki

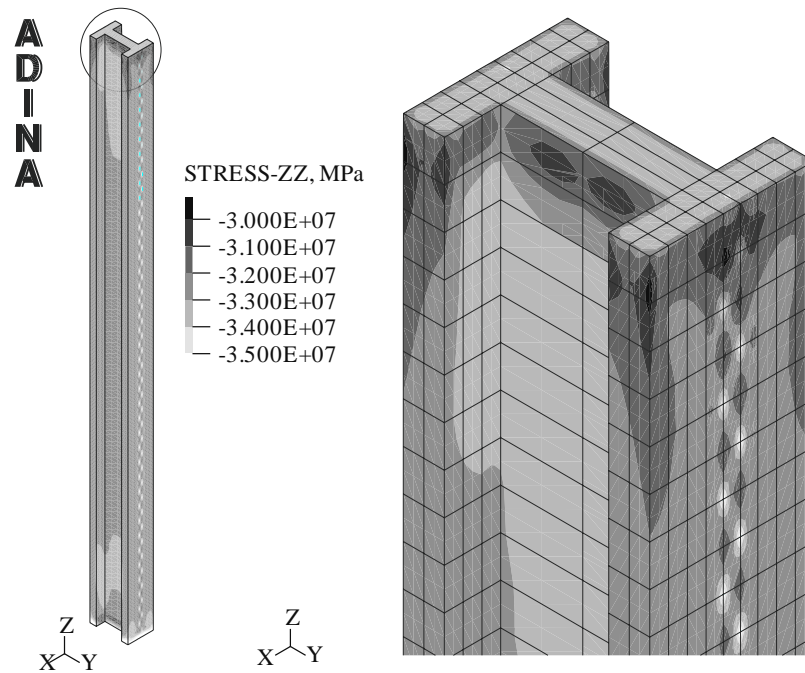
TABELA 1

Maksymalne dopuszczalne siły wg modelu numerycznego oraz obliczeń analitycznych

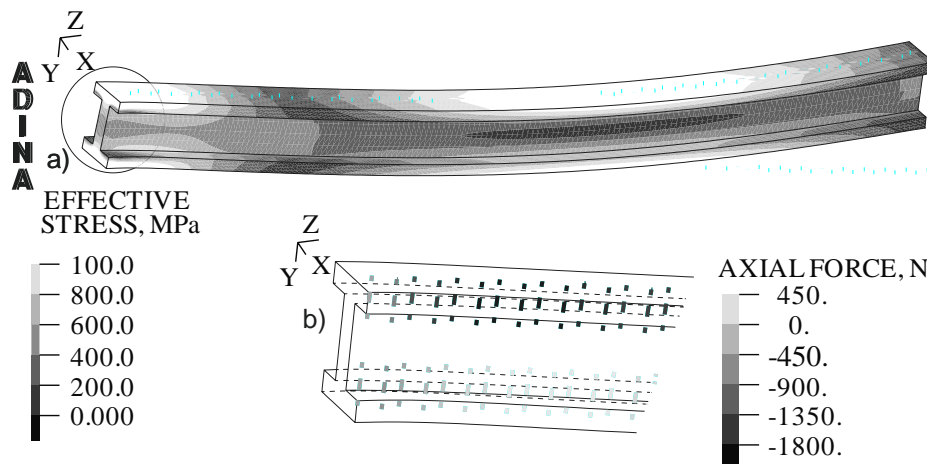
| | Słup | Belka |
|----------------------------|-----------|----------|
| MES - Materiał izotropowy | 21,57 MPa | 1,50 MPa |
| MES - Materiał ortotropowy | 33,00 MPa | 1,20 MPa |
| Obliczenia analityczne | 5,598 MPa | 0,45 MPa |

Na rysunku 5 przedstawiono rozkład naprężeń normalnych σ_{zz} w MPa. Lokalna koncentracja naprężeń w słupie wynika z przyjętych warunków brzegowych - utwierdzenia jednego z węzłów skrajnych. Dodatkowo koncentrację naprężeń zaobserwowano w obszarze elementów stalowych - gwoździ.

Rysunek 6 pokazuje analizę zginanej belki: naprężenia zredukowane w drewnie - rys. 6a oraz siły osiowe w gwoździach - rys. 6b. Lokalną koncentrację naprężeń zauważono w części utwierdzonej oraz środkowej belki. Na podstawie sił osiowych zaobserwowano, iż występuje ściskanie oraz rozciąganie gwoździ, w pasie górnym - rozciąganie w części przypodporowej oraz ściskanie w kierunku środka belki, w pasie dolnym - przeciwnie.

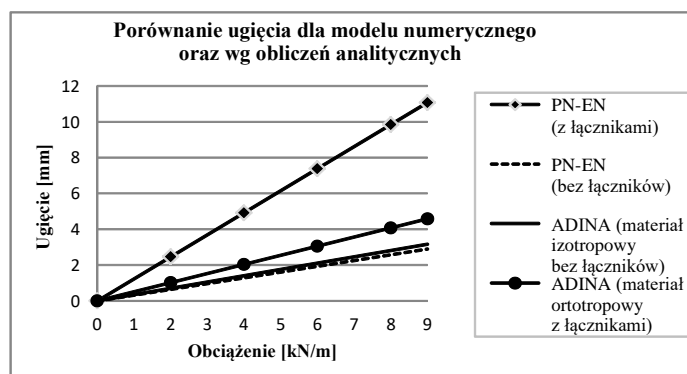


Rys. 5. Analiza naprężeń ZZ na słupie przy maksymalnym obciążeniu



Rys. 6. Analiza zginania belki: a) naprężenia zredukowane w elemencie drewnianym (belce), MPa, b) siły osiowe w stali (gwoździach)

Na rysunku 7 pokazano wartość ugięcia belki na podstawie obliczeń analitycznych w porównaniu do numerycznych.



Rys. 7. Porównanie ugięcia dla modelu numerycznego oraz wg obliczeń analitycznych

Podsumowanie

Różnice dotyczące ściskania i zginania belki drewnianej wynikają z innego podejścia obliczeniowego metody elementów skończonych w porównaniu do obliczeń normowych. Normy zakładają określone wartości współczynników bezpieczeństwa. Ponadto różnica wynika z uwzględnienia w metodzie elementów skończonych ortotropowej budowy drewna.

Z analizy ugięcia belki zauważono, że traktując model numeryczny oraz analityczny jako izotropowy bez gwoździ, otrzymano podobne wartości ugięć. W przypadku modelu ortotropowego z łącznikami ADINA nieznacznie zmienia wartość ugięcia w porównaniu do materiału izotropowego bez łączników. Największą odchyłkę zauważono przy obliczeniach analitycznych z gwoździami. Blisko trzykrotne zwiększenie ugięcia jest spowodowane sztywnością zastępczą przy zginaniu, na którą wpływa współczynnik B.5 wg [11]:

$$\gamma_i = \left[1 + \frac{\pi^2 E_i A_i s_i}{K_i l^2} \right]^{-1} \quad (3)$$

gdzie:

E - 5-procentowy kwantyl modułu sprężystości wzdłuż włókien [N/mm²];

A - pole przekroju półki [m²];

s - rozstaw gwoździ po sprowadzeniu do jednego rzędu [m];

K - moduł podatności chwilowej łączników [N/mm];

l - rozpiętość obliczeniowa belki [m].

Literatura

- [1] Schmidt L., Kaliske M., Models for numerical failure analysis of wooden structures, *Engineering Structures* 2009, 31, 571-579.
- [2] Benabou L., Finite strain analysis of wood species under compressive failure due to kinking, *International Journal of Solids and Structures* 2012, 49, 408-419.

- [3] Holmberg S., Persson K., Petersson H., Nonlinear mechanical behaviour and analysis of wood and fibre materials, *Computers and Structures* 1999, 72, 459-480.
- [4] Oudjene M., Khelifa M., Finite element modelling of wooden structures at large deformations and brittle failure prediction, *Materials and Design* 2009, 30, 4081-4087.
- [5] Reiterer A., Stanzl-Tschegg S.E., Compressive behaviour of softwood under uniaxial loading at different orientations to the grain, *Mechanics of Materials* 2001, 33, 705-715.
- [6] Byskov E., Moran P.M., Poulsen J.S., Shih C.F., Kink band initiation and band broadening in clear wood under compressive loading, *Mechanics of Materials* 1997, 25, 67-77.
- [7] Bariska M., Kučera L.J., On the fracture morphology in Wood. Part 1 : A SEM-study of deformations in wood of spruce and aspen upon ultimate axial compression load, *Wood Science and Technology* 1982, 16, 241-259.
- [8] Kozakiewicz P., Wpływ temperatury i wilgotności na wytrzymałość na ściskanie wzdłuż włókien wybranych rodzajów drewna o zróżnicowanej gęstości i budowie anatomicznej, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2010.
- [9] Kotwica J., Konstrukcje drewniane w budownictwie tradycyjnym, Arkady, Warszawa 2009.
- [10] PN-EN 1991-1-1 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje, Część 1-1: Oddziaływania ogólne. Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach.
- [11] PN-EN 1995-1-1 Projektowanie konstrukcji drewnianych, Część 1-1: Postanowienia ogólne. Reguły ogólne i reguły dotyczące budynków.

Streszczenie

Praca prezentuje analizę drewnianych elementów dwuteowych powstałych przez łączenie gwoździemi. Ustalono maksymalną siłę ściskającą słup, zginającą belkę oraz ugięcie belki. Porównano wartości uzyskane przez obliczenia analityczne oraz model metody elementów skończonych (MES). Materiał traktowano jako sprężysty z izotropową oraz ortotropową strukturą.

The numerical analysis of wooden structure as orthotropic structure

Abstract

This paper presents an analysis of the elements of wood I-beam connected with nails. Set the maximum compressive forces on pole, bending beam and the beam displacement. Compared to the values obtained by calculation based on standards and the model of the Finite Element Method. Material was treated as an elastic one with isotropic and orthotropic structure.