

Р.К. Алексанян, В.А. Едоян, Д.Р. Алексанян

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ АНИЗОТРОПИИ

Задаче кручения составного призматического стержня с составными изотропными или анизотропными частями с различными упругими характеристиками посвящены работы [1-8] и др.

1. В настоящей работе рассматривается задача кручения призматического стержня, составленного из двух призматических частей, соединенных между собой по всей общей части боковых поверхностей. Материалы составных частей стержня обладают различными свойствами цилиндрической анизотропии, имеют плоскости упругой симметрии, совпадающие с плоскостью поперечного сечения составного стержня. Оси анизотропии частей стержня совпадают с осью oz цилиндрической системы координат, перпендикулярной плоскости поперечного сечения стержня. Составной стержень подвергается кручению моментами M_z , действующими на торцевых сечениях стержня.

Ось $\theta = 0$ полярной системы координат направим по общей прямолинейной границе клиновидных частей поперечного сечения составного стержня, a начало координатной системы поместим на общей вершине клиньев (рис. 1).

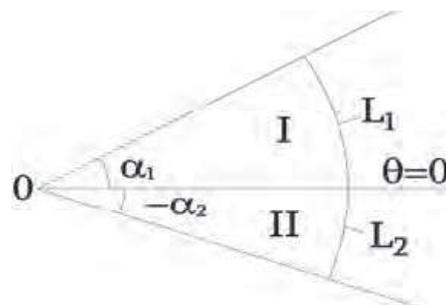


Рис. 1.

Функции напряжений $F_i(r, \theta)$ ($i = 1, 2$), относящихся к областям I и II, удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\alpha_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 F_i}{\partial r^2} - 2\alpha_{45}^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F_i}{\partial r \partial \theta} + \alpha_{55}^{(i)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \theta^2} + \alpha_{44}^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial F_i}{\partial r} = -2\nu, \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где коэффициенты $\alpha_{44}^{(i)}$, $\alpha_{45}^{(i)}$, $\alpha_{55}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) - упругие постоянные материалов, относящихся к I и II частям составного клина, которые удовлетворяют условиям

$$\alpha_{44}^{(i)} > 0, \quad \alpha_{45}^{(i)} > 0, \quad \alpha_{44}^{(i)} \alpha_{55}^{(i)} - \alpha_{45}^{(i)2} > 0, \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

где ν - общий относительный угол закручивания.

Напряжения $\sigma_{rz}^{(i)}$ и $\sigma_{\theta z}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) посредством функций напряжения определяются следующими формулами:

$$\sigma_{rz}^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_i}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z}^{(i)} = -\frac{\partial F_i}{\partial r}, \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

Функции напряжений удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$F_1(r, \theta)|_{\theta=\alpha_1} = 0, \quad F_2(r, \theta)|_{\theta=-\alpha_2} = 0 \quad (1.4)$$

$$F_1(r, \theta)|_{L_1} = 0, \quad F_2(r, \theta)|_{L_2} = 0 \quad (1.5)$$

На линии контакта $\theta = 0$ должны выполняться следующие условия смежности [2, 3]:

$$F_1(r, \theta)|_{\theta=0} = F_2(r, \theta)|_{\theta=0} \quad (1.6)$$

$$-\alpha_{45}^{(1)} \frac{\partial F_1}{\partial r} + \alpha_{55}^{(1)} \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = -\alpha_{45}^{(2)} \frac{\partial F_2}{\partial r} + \alpha_{55}^{(2)} \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}$$

2. Решение уравнений (1.1) представим в виде

$$F_i(r, \theta) = \bar{F}_i(r, \theta) + F_{i0}(r, \vartheta), \quad (i = 1, 2)$$

где $\bar{F}_i(r, \theta)$ - общие решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (1.1), а $F_{i0}(r, \vartheta)$ - частные решения (1.1).

Функции $F_i(r, \theta)$ ($i = 1, 2$) представим в виде

$$\bar{F}_1(r, \theta) = r^\lambda \Phi_1(\theta) \quad (2.1)$$

$$\bar{F}_2(r, \theta) = r^\lambda \Phi_2(\theta) \quad (2.2)$$

Рассматривая однородные уравнения, соответствующие уравнениям (1.1), на основании (2.1)-(2.2) получим следующие уравнения относительно $\Phi_i(\theta)$, ($i = 1, 2$):

$$\alpha_{55}^{(i)} \Phi_i'' - 2\lambda \alpha_{45}^{(i)} \Phi_i' + \alpha_{44}^{(i)} \lambda^2 \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

Представив решения уравнений (2.3) в виде

$$\Phi_i(\theta) = A_i e^{\theta k^{(i)}} \quad (2.4)$$

получим для $k^{(i)}$ характеристическое уравнение

$$\alpha_{55}^{(i)} k^{(i)2} - 2\lambda \alpha_{45}^{(i)} k^{(i)} + \lambda^2 \alpha_{44}^{(i)} = 0 \quad (2.5)$$

Учитывая условия (1.2), для решений уравнения (2.5) получим

$$k^{(j)} = \lambda(\sigma_j \pm i\nu_j) \quad (j = 1, 2)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\alpha_{45}^{(1)}}{\alpha_{55}^{(1)}} & \nu_1 &= \frac{\left(a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)2}\right)^{1/2}}{a_{55}^{(1)}} \\ \sigma_2 &= \frac{\alpha_{45}^{(2)}}{\alpha_{55}^{(2)}} & \nu_2 &= \frac{\left(a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)2}\right)^{1/2}}{a_{55}^{(2)}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Общие решения (2.3) представляются в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) &= e^{\lambda\sigma_1\theta} (A_1 \cos \lambda\nu_1\theta + B_1 \sin \lambda\nu_1\theta) \\ \Phi_2(\theta) &= e^{\lambda\sigma_2\theta} (A_2 \cos \lambda\nu_2\theta + B_2 \sin \lambda\nu_2\theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

а решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (1.1), $\bar{F}_i(r, \theta)$, ($i = 1, 2$) - в виде

$$\bar{F}_1(r, \theta) = r^\lambda e^{\lambda\sigma_1\theta} (A_1 \cos \lambda\nu_1\theta + B_1 \sin \lambda\nu_1\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_1 \quad (2.8)$$

$$\bar{F}_2(r, \theta) = r^\lambda e^{\lambda\sigma_2\theta} (A_2 \cos \lambda\nu_2\theta + B_2 \sin \lambda\nu_2\theta), \quad -\alpha_2 \leq \theta \leq \alpha_1 \quad (2.9)$$

Удовлетворяя граничным (1.4) и контактными (1.6) условиям, получим однородную систему уравнений относительно постоянных интегрирования A_i, B_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} A_1 \cos \lambda \nu_1 \alpha_1 + B_1 \sin \lambda \nu_1 \alpha_1 = 0 \\ A_2 \cos \lambda \nu_2 \alpha_2 + B_2 \sin \lambda \nu_2 \alpha_2 = 0 \\ A_1 = A_2 \\ B_2 = \mu B_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}, \quad d_i = a_{44}^{(i)} a_{55}^{(i)} - (a_{45}^{(i)})^2, \quad (i=1,2)$$

Из условия существования нетривиального решения системы (2.10) получим следующее уравнение относительно λ :

$$(1 + \mu) \sin \lambda (\nu_2 \alpha_2 + \nu_1 \alpha_1) + (1 - \mu) \sin \lambda (\nu_1 \alpha_1 - \nu_2 \alpha_2) = 0 \quad (2.11)$$

3. Частное решение уравнений (1.1) представим в виде

$$F_{10}(r, \theta) = r^2 f_{10}(\theta), \quad F_{20}(r, \theta) = r^2 f_{20}(\theta) \quad (3.1)$$

Функции $f_{i0}(\theta)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\alpha_{55}^{(i)} f_{i0}'' - 4a_{45} f_{i0}' + 4\alpha_{44}^{(i)} f_{i0} = -2\nu \quad (3.2)$$

Определяя общие решения уравнений (3.2), для частных решений $F_{i0}(r, \theta)$ уравнений (1.1) на основании (3.1) получим следующие выражения

$$F_{10} = r^2 e^{2\sigma_1 \theta} (A_{10} \cos 2\nu_1 \theta + B_{10} \sin 2\nu_1 \theta) + C_{10} r^2 \quad (3.3)$$

$$F_{20} = r^2 e^{2\sigma_2 \theta} (A_{20} \cos 2\nu_2 \theta + B_{20} \sin 2\nu_2 \theta) + C_{20} r^2 \quad (3.4)$$

где A_{i0}, B_{i0}, C_{i0} - постоянные интегрирования, а σ_i, ν_i определяются формулами (2.6).

Потребуем, чтобы частные решения (3.3) и (3.4) удовлетворяли уравнениям (1.1), граничным (1.4) и контактными (1.6) условиям. В результате получим линейную алгебраическую неоднородную систему уравнений относительно A_{i0}, B_{i0} и C_{i0} ($i=1,2$)

$$\begin{cases} 2a_{44}^{(1)} C_{10} = -\nu \\ 2a_{44}^{(2)} C_{20} = -\nu \\ e^{2\sigma_1 \alpha_1} (A_{10} \cos 2\nu_1 \alpha_1 + B_{10} \sin 2\nu_1 \alpha_1) + C_{10} = 0 \\ e^{2\sigma_2 \alpha_2} (A_{20} \cos 2\nu_2 \alpha_2 + B_{20} \sin 2\nu_2 \alpha_2) + C_{20} = 0 \\ A_{10} - A_{20} = C_{20} - C_{10} \\ \sqrt{d_1} B_{10} - \sqrt{d_2} B_{20} = a_{45}^{(1)} C_{10} - a_{45}^{(2)} C_{20} \end{cases} \quad (3.5)$$

4. Общие решения уравнений (1.1), удовлетворяющих граничным (1.4) и контактными (1.6) условиям, можно представить в виде:

$$F_1(r, \theta) = \sum_{(\lambda_k)} r^{\lambda_k} e^{\lambda_k \sigma_1 \theta} [A_{1k} \cos \lambda_k \nu_1 \theta + B_{1k} \sin \lambda_k \nu_1 \theta] + F_{10}(r, \theta) \quad (4.1)$$

$$F_2(r, \theta) = \sum_{(\lambda_k)} r^{\lambda_k} e^{\lambda_k \sigma_2 \theta} [A_{2k} \cos \lambda_k \nu_2 \theta + B_{2k} \sin \lambda_k \nu_2 \theta] + F_{20}(r, \theta) \quad (4.2)$$

Здесь λ_k - положительные корни уравнения (2.11). Сумма распространяется на все положительные корни уравнения (2.11). Это ограничение вытекает из условия конечности потенциальной энергии деформации в окрестности точки $r = 0$.

Решения (4.1) и (4.2) представим в другой, часто применяемой форме:

$$F_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k (\sigma_1 \theta + \ln r)} \bar{u}_{1k}(\gamma) + F_{10}(r, \gamma) \quad (4.3)$$

$$F_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k (\sigma_2 \theta + \ln r)} \bar{u}_{2k}(\gamma) + F_{20}(r, \gamma) \quad (4.4)$$

где

$$\bar{u}_k(\gamma) = \begin{cases} \bar{u}_{1k}(\gamma) = A_{1k} \cos \lambda_k \gamma + B_{1k} \sin \lambda_k \gamma, & 0 \leq \gamma \leq \nu_1 \alpha_1 = \varphi_1 \\ \bar{u}_{2k}(\gamma) = A_{2k} \cos \lambda_k \gamma + B_{2k} \sin \lambda_k \gamma, & -\nu_2 \alpha_2 = -\varphi_2 \leq \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{здесь } \gamma = \begin{cases} \nu_1 \theta & \text{при } 0 \leq \theta \leq \alpha \\ \nu_2 \theta & \text{при } -\alpha_2 \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

на основании (2.10) имеем

$$A_1 = -B \operatorname{tg} \lambda \nu_1 \alpha_1, \quad A_1 = A_2, \quad B_2 = \mu B_1$$

при этом предполагаем, что уравнение $\cos \lambda \nu_1 \alpha_1 = 0$ не имеет общих корней с уравнением (2.11). Поэтому (4.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_{1k} \cos \lambda_k \nu_1 \theta + B_{1k} \sin \lambda_k \nu_1 \theta &= B_{1k} (\sin \lambda_k \nu_1 \theta - \operatorname{tg} \lambda_k \nu_1 \alpha_1 \cos \lambda_k \nu_1 \theta) \\ A_{2k} \cos \lambda_k \nu_2 \theta + B_{2k} \sin \lambda_k \nu_2 \theta &= -B_{1k} \operatorname{tg} \lambda_k \nu_1 \alpha_1 \cos \lambda_k \nu_2 \theta + \mu B_{1k} \sin \lambda_k \nu_2 \theta = (4.6) \\ &= B_{1k} (\mu \sin \lambda_k \nu_2 \theta - \operatorname{tg} \lambda_k \nu_1 \alpha_1 \cos \lambda_k \nu_2 \theta) \end{aligned}$$

или

$$\bar{u}_k(\gamma) = \begin{cases} \bar{u}_{1k} = B_{1k} (\sin \lambda_k \gamma - \operatorname{tg} \lambda_k \varphi_1 \cos \lambda_k \gamma), & 0 \leq \gamma \leq \varphi_1 \\ \bar{u}_{2k} = B_{1k} (\mu \sin \lambda_k \gamma - \operatorname{tg} \lambda_k \varphi_1 \cos \lambda_k \gamma), & -\varphi_2 \leq \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

(4.7) (или (4.5)) на отрезке $[-\varphi_2, \varphi_1]$ является системой ортогональных функций, с кусочно-постоянным весом $d(\gamma)$:

$$d(\gamma) = \begin{cases} d_1 = \left[\alpha_{44}^{(1)} \alpha_{55}^{(1)} - \alpha_{45}^{(1)2} \right]^{1/2} & \text{при } 0 \leq \gamma \leq \varphi_1 \\ d_2 = \left[\alpha_{44}^{(2)} \alpha_{55}^{(2)} - \alpha_{45}^{(2)2} \right]^{1/2} & \text{при } -\varphi_2 \leq \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

как система собственных функций дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{u}_1'' + \lambda^2 \bar{u}_1 &= 0 & \text{при } 0 \leq \gamma \leq \varphi_1 \\ \bar{u}_2'' + \lambda^2 \bar{u}_2 &= 0 & \text{при } -\varphi_2 \leq \gamma \leq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

при следующих граничных и контактных условиях

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \Big|_{\gamma=\varphi_1} &= 0 & \bar{u}_2 \Big|_{\gamma=-\varphi_2} &= 0 \\ \bar{u}_1 \Big|_{\gamma=0} &= \bar{u}_2 \Big|_{\gamma=0} & \mu \frac{d\bar{u}_1}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{d\bar{u}_2}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\mu = \frac{d_1}{d_2}$.

Предположим, что замыкающие L_1 и L_2 части контура области поперечного сечения составного стержня определяются уравнениями

$$\begin{aligned} L_1: \sigma_1 \theta + \ln r &= \ln r_0 = c & 0 \leq \theta \leq \alpha_1 \Rightarrow r &= r_0 e^{-\sigma_1 \theta} \\ L_2: \sigma_2 \theta + \ln r &= \ln r_0 = c & -\alpha_2 \leq \theta \leq 0 \Rightarrow r &= r_0 e^{-\sigma_2 \theta} \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.4)-(1.5), получим

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} B_{1\kappa} e^{\lambda_{\kappa} c} \bar{u}_{\kappa}(\gamma) = g(\gamma) \quad (4.11)$$

где

$$\bar{u}_{\kappa}(\gamma) = \begin{cases} \bar{u}_{1\kappa} = \sin \lambda_{\kappa} \gamma - \operatorname{tg} \lambda_{\kappa} \varphi_1 \cos \lambda_{\kappa} \gamma & 0 \leq \gamma \leq \varphi_1 \\ \bar{u}_{2\kappa} = \mu \sin \lambda_{\kappa} \gamma - \operatorname{tg} \lambda_{\kappa} \varphi_1 \cos \lambda_{\kappa} \gamma & -\varphi_2 \leq \gamma \leq 0 \end{cases}$$

$$g(\gamma) = \begin{cases} g_1(\gamma) = F_{10} \left(r_0 e^{-\frac{\sigma_1}{v_1} \gamma}, \gamma \right) & 0 \leq \gamma \leq \varphi_1 \\ g_2(\gamma) = F_{20} \left(r_0 e^{-\frac{\sigma_2}{v_2} \gamma}, \gamma \right) & -\varphi_2 \leq \gamma \leq 0 \end{cases}$$

Разлагая функцию $g(\gamma)$ в ряд по функциям $\bar{u}_n(\gamma)$

$$g(\gamma) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa} \bar{u}_{\kappa}(\gamma) \quad (4.12)$$

на основании (4.11) будем иметь:

$$B_{1\kappa} = b_{\kappa} e^{-\lambda_{\kappa} c} \quad (4.13)$$

где

$$b_{\kappa} = \frac{\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} g(\gamma) d(\gamma) \bar{u}_{\kappa}(\gamma) d\gamma}{\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} d(\gamma) \bar{u}_{\kappa}^2(\gamma) d\gamma} \quad (4.14)$$

Для функций напряжения получим следующие представления:

$$F_1(r, \theta) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_{\kappa} e^{\lambda_{\kappa} \left(\sigma_1 \theta + \ln \frac{r}{r_0} \right)} (\sin \lambda_{\kappa} \gamma - tg \lambda_{\kappa} \varphi_1 \cos \lambda_{\kappa} \gamma) + F_{10}(r, \gamma) \quad (4.15)$$

$$0 \leq \gamma \leq \varphi_1, \quad \gamma = \nu_1 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_1$$

$$F_2(r, \theta) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_{\kappa} e^{\lambda_{\kappa} \left(\sigma_2 \theta + \ln \frac{r}{r_0} \right)} (\mu \sin \lambda_{\kappa} \gamma - tg \lambda_{\kappa} \varphi_1 \cos \lambda_{\kappa} \gamma) + F_{20}(r, \gamma) \quad (4.16)$$

$$-\varphi_2 \leq \gamma \leq 0, \quad \gamma = \nu_2 \theta, \quad -\alpha_2 \leq \theta \leq 0$$

Отметим, что порядок особенности напряжений в вершине $r = 0$ составного стержня с различными анизотропными характеристиками клиновидных частей, на основании (1.3) и (4.15)-(4.16) равен $1 - \lambda_1$, где λ_1 - наименьший корень уравнения (4.11) в интервале $(0; 1)$.

Литература

- [1] Мухелишвили Н.И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М.: 1954, 708 с.
- [2] Векуа И.Н., Рухадзе А.К., ПММ. 1933. Т. 1. Вып. 2, с. 167-178.
- [3] Чобанян К.С., Напряжения в упругих составных телах, Ереван. Изд. АН Арм. ССР, 1987, 338 с.
- [4] Саркисян В.С., ДАН Арм. ССР, 1965, Т. 40, № 2, с. 81-87.
- [5] Геворкян С.Х., Изв. АН Арм. ССР, Механика 1968, Т. 21, № 4, с. 30-39.

- [6] Алексанян Р.К., Чобанян К.С., Прикладная механика 1977, Т. 13, № 6, с. 90-96.
- [7] Алексанян Р.К., Мелик-Саркисян С.А., Изв. АН Арм. ССР, Механика 1978, Т. 31, № 1, с. 40-49.
- [8] Едоян В.А., V Международная конференция “Актуальные проблемы архитектуры и строительства”, Санкт-Петербургский Государственный Архитектурно-Строительный Университет, 2013, с. 235-240.

Резюме

Рассматривается задача кручения призматического стержня, составленного из двух призматических частей, соединяемых по общей части боковых поверхностей. Материалы составных частей стержня обладают различными свойствами цилиндрической анизотропии, имеют плоскости упругой симметрии, совпадающие с плоскостью поперечного сечения составного стержня. Получено точное решение задачи, когда непрямолинейные края замыкающей части поперечного сечения стержня являются дугами логарифмических спиралей, определяемые упругими постоянными материалов соответствующих частей. В ходе решения задачи получено характеристическое уравнение относительно собственных значений λ краевой задачи. Когда в интервале $(0;1)$ существуют корни характеристического уравнения, то напряжение в угловой точке $r = 0$ поперечного сечения составного стержня имеет особенности. Порядок особенностей равен $1 - \lambda_1$, где λ_1 - наименьший корень в интервале $(0;1)$.

Ключевые слова: кручение, призматический стержень, краевая задача, цилиндрическая анизотропия, логарифмическая спираль

Torsion of a prismatic rod composed of materials with different anisotropic properties

Abstract

In this paper the torsion problem of a prismatic rod made up of two prismatic parts connected by a common part of the lateral surfaces is considered. Materials of component parts of the rod are of different features of cylindrical anisotropy and they have planes of elastic symmetry coinciding with the plane of the cross-section of the rod. An exact solution of the problem has been obtained in a case when the non-rectilinear edges of the closing part of the cross-section of the rod are arcs of logarithmic spirals defined by the elastic constants of materials of respective parts. While solving the problem a characteristic equation with respect to eigenvalues λ of the boundary problem has been derived. If the roots of the characteristic equation exist in the interval $(0;1)$, then the stress at the vertex angle $r = 0$ of the cross-sections of a composite rod has a singularity. The order of singularity is equal to $1 - \lambda_1$, where λ_1 is the smallest root in the interval $(0;1)$.

Keywords: torsion, prismatic rod, boundary problem, cylindrical anisotropy, logarithmic spiral