

Andrzej HEIM*, Tomasz OLEJNIK*

PROCES ROZDRABNIANIA W MŁYNIE KULOWYM OPISANY TEORIĄ MOMENTÓW STATYSTYCZNYCH

W pracy przedstawiono wyniki badań mających na celu weryfikację doświadczalną modelu procesu rozdrabniania w młynie kulowym, opartego na teoriach momentów. Próby mielenia wykonano w skali laboratoryjnej w młynie o pojemności 6 dm³ dla materiałów skalnych, określając w poszczególnych momentach czasu skład granulometryczny wsadu. Obliczono wartości momentów zerowych, momentów centralnych oraz współczynniki spłaszczenia i asymetrii. Zbadano zależności między tymi wielkościami w funkcji czasu mielenia.

WSTĘP

Prawidłowo realizowany proces mielenia powinien dawać produkt jak najbardziej monodispersyjny, a więc o małym rozrzucie wielkości ziaren i żądanym ich rozmiarze, a jednocześnie jednostkowe nakłady energetyczne powinny być minimalne.

Model matematyczny kinetyki procesu rozdrabniania, rozumiany jako równanie lub układ równań, wiąże parametry składu granulometrycznego rozdrabnianego materiału z czasem mielenia, a stałe w modelu zależą od warunków jego realizacji (parametrów procesowo-aparaturowych). Pozwala on na przewidywanie składu produktu przy odpowiednim składzie surowca czy też odpowiednie sterowanie procesem. Z utylitarnego punktu widzenia model z jednej strony pozwala możliwie wiernie odwzorować rzeczywisty przebieg procesu, a jednocześnie powinien być prosty i zawierać niewiele parametrów i wielkości koniecznych do ustalenia na drodze doświadczalnej.

OZNACZENIA

- $a_{n,j}$ – parametr (stała)
- $b_{i,j}$ – parametr dystrybucji (rozkładu) mielenia
- $B(x,y)$ – przyrost wagowy materiału w przedziałach rozmiarowych poniżej rozmiaru x wskutek rozdrobnienia materiału należącego do przedziału rozmiarowego y
- C, C_1, C_2 – stałe

* Politechnika Łódzka, Wydział Inżynierii Procesowej i Ochrony Środowiska.

$f(x)$	– funkcja gęstości prawdopodobieństwa
K_1	– współczynnik spłaszczenia
K_2	– współczynnik asymetrii
m	– ilość przedziałów rozmiarowych
m_k	– moment zerowy rzędu k
M_k	– moment centralny rzędu k
p	– stopień rozdrobnienia
p_i	– masowy udział ziaren z przedziału rozmiarowego i [%]
$P(x, t)$	– udział frakcji ziaren od 0 do x po czasie mielenia t [%]
P_1, P_2, P_m	– frakcje rozkładu skumulowanego
$S(y)$	– parametr selekcji ziaren materiału z przedziału rozmiarowego y [1/s]
t	– czas mielenia [s]
x_i, y_i	– średnie wartości rozmiaru ziaren x oraz y w przedziale i lub j [m]

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zagadnienia matematycznego modelowania procesu rozdrabniania zawiera następujące podstawowe problemy:

1. Wybór funkcji, która w najlepszy sposób opisałaby zależność udziału ziaren o określonych rozmiarach od ich wymiarów charakterystycznych, mimo zmiany tych udziałów w czasie procesu.

2. Opracowanie równania kinetyki procesu rozdrabniania, czyli określenie szybkości zmian składu granulometrycznego w czasie, w zależności od właściwości rozdrabnianego materiału oraz od parametrów technologicznych procesu.

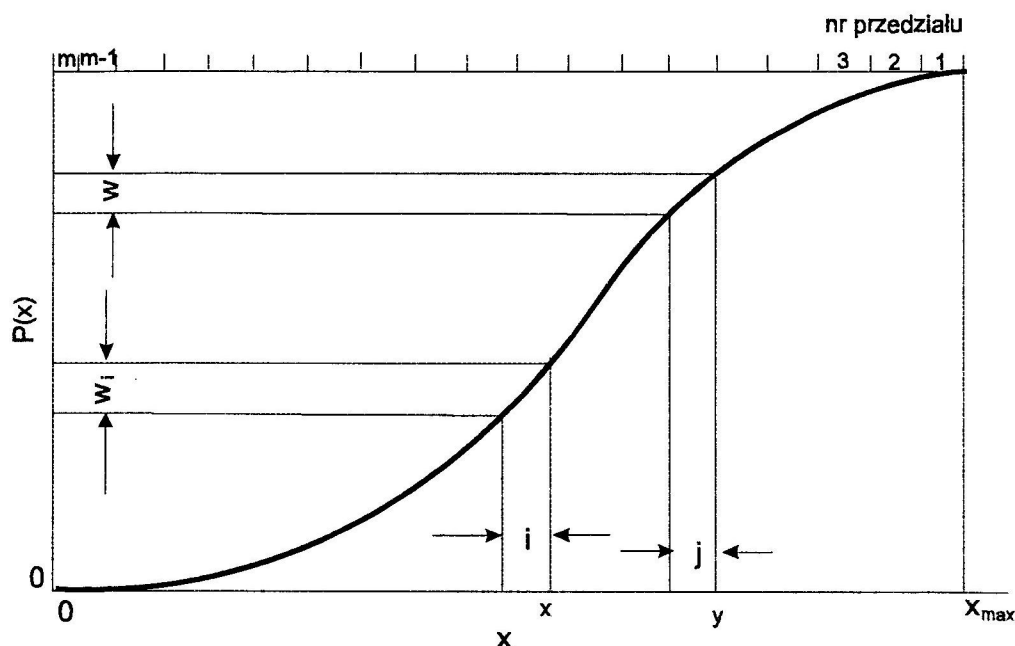
Mimo ogromnej powszechności stosowania procesu rozdrabniania, zagadnienia te znalazły się w polu zainteresowań badaczy dopiero w ostatnich latach.

Klasyczne modelowanie składu granulometrycznego materiału ziarnistego polega na podziale całego zakresu zmienności wymiarów ziaren ($0, x_{\max}$) na skończoną liczbę przedziałów rozmiarowych m , każdy o określonej wielkości (rys. 1).

Przedział, w którym występują ziarna największe oznacza się numerem 1, następny numerem 2 i kolejno aż do m . Maksymalny wymiar ziaren w przedziale j wynosi y i jest większy od maksymalnego wymiaru ziaren w przedziale i , który wynosi x , czyli $y > x$. Do dalszych rozważań bierze się największe wartości y oraz x w danym przedziale rozmiarowym j oraz i , jako charakterystyczne dla danego przedziału. Pozwala to na łatwe otrzymanie udziału wagowego ziaren w danym przedziale rozmiarowym w_i przez odejmowanie od siebie wartości $P(x)$ dla kolejnych przedziałów rozmiarowych, tzn.

$$w_i = P(x)_{i-1} - P(x)_i \quad (1)$$

gdzie wartość funkcji $P(x)$ określa udział masowy ziaren o wymiarach nie większych niż x . Funkcja $P(x)$ jest opisem matematycznym składu granulometrycznego. Znanych jest kilka propozycji postaci tej funkcji.



Rys. 1. Skumulowany rozkład masowo-rozmiarowy;
 $P(x)$ – udział wagowy frakcji mniejszej od rozmiaru x , x – wielkość ziarna

Fig. 1. Cumulated mass-size distribution;
 $P(x)$ – mass fraction of particles smaller than x , x – particle size

Klasyczna analiza kinetyki rozdrabniania opiera się na bilansie masowym każdego przedziału rozmiarowego z osobna, co prowadzi do równania różniczkowego postaci:

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = -S_i w_i(t) + \sum_{j=1, i>1}^{i-1} (B_{i,j} - B_{i+1,j}) S_j w_j(t) \quad (2)$$

gdzie:

S_i – szybkość zanikania ziaren z przedziału rozmiarowego i podczas rozdrabniania.

$B_{i,j}$ – udział masy ziaren, które przeszły z przedziału rozmiarowego j do wszystkich przedziałów mniejszych od i oraz przedziału i .

$$B_{i,j} - B_{i+1,j} = b_{i,j}$$

$b_{i,j}$ – udział wagowy ziaren z przedziału rozmiarowego j , które zostały rozdrobnione do przedziału i .

dw_i/dt – szybkość ubytku masowego frakcji z przedziału rozmiarowego i ,

$-S_i w_i(t)$ – ubytek frakcji i w wyniku rozdrobnienia do przedziałów leżących poniżej tego rozmiaru,

$$\sum_{j=1, i>1}^{i-1} (B_{i,j} - B_{i+1,j})^* S_j^* w_j(t) - \text{dopływ do przedziału } i \text{ materiału zmielonego z prze-}$$

działów o ziarnach większych.

Przyjmuje się zwykle, że szybkość rozdrabniania danej frakcji S_i jest stała w czasie, jak również stała jest funkcja rozkładu $b_{i,j}$, a tym samym stała jest funkcja $B_{i,j}$.

Przykładowo podano następującą postać funkcji rozkładu:

$$B(x, y) = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{y}}}{1 - \frac{1}{e}} \quad (3)$$

Korzystanie z wyżej omówionego modelu kinetyki procesu rozdrabniania wymaga doświadczalnego ustalenia szeregu wielkości (parametrów) oraz żmudnych obliczeń matematycznych zarówno na etapie ustalania wartości tych parametrów, jak i potem podczas projektowania procesu rzeczywistego.

Odminną koncepcję opisu przebiegu procesu rozdrabniania zaproponował Heim (Heim, Pietrzykowski 1993; Heim 1993). Punktem wyjścia było wykorzystanie do zdefiniowania składu granulometrycznego układu ziarnistego teorii momentów, a konkretnie momentu zerowego pierwszego rzędu oraz współczynników spłaszczenia K_1 i asymetrii K_2 . Są one określane wzorami

$$m_1 = \sum_{i=1}^m d_i^k p_i \quad (4)$$

gdzie:

i – numer przedziału rozmiarowego,

p_i – udział masowy ziaren przedziału rozmiarowego i .

$$K_1 = \frac{M_4}{(M_2)^2} - 3 \quad (5)$$

$$K_2 = \frac{M_3}{(M_2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

gdzie moment centralny rzędu k

$$M_k = \sum_{i=1}^m d_i^k p_i \quad (7)$$

Moment zerowy rzędu pierwszego jest tożsamościowy ze średnim wymiarem ziarna.

Analizując zmianę wyżej określonych wielkości w czasie mielenia różnych materiałów w młynie kulowym, stwierdzono (Heim, Pietrzykowski 1993) istnienie między nimi pewnych zależności, identycznych dla surowców nawet o zasadniczo różnej podatności na rozdrabnianie. Opracowany zakres badań przedstawionych w pracach (Heim, Pietrzykowski 1993; Heim 1993) nie pozwolił jednak na wyciągnięcie wniosków uogólniających.

Niniejsza praca, rozszerzająca ten zakres, miała na celu zweryfikowanie proponowanego modelowania procesu mielenia z wykorzystaniem teorii momentów.

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Celem prowadzonych prac laboratoryjnych była próba znalezienia odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy opis procesu rozdrabniania wykorzystujący teorie momentów daje w pełni zadowalające rezultaty ?
2. Czy związek między współczynnikami spłaszczenia a wymiarem ziarna średniego dla różnych warunków procesu mielenia ma ten sam charakter ?
3. Czy występują prawidłowości związane ze zmianą współczynników spłaszczenia i asymetrii wynikające z różnych wielkości nadawy i różnych liczby kul ?

Do badań użyto ceramicznego młyna kulowego o średnicy wewnętrznej bębna 0,2 m i pojemności 6 dm³. Częstość obrotowa bębna wynosiła 1,6 s⁻¹, co odpowiadało teoretycznej prędkości krytycznej.

Próby mielenia prowadzono w stałych warunkach procesowo-aparaturowych. Serie badań różniły się wypełnieniem młynka: 300 lub 450 cm³ nadawy; rodzajem mielników: kule stalowe lub korundowe; liczbą oraz średnicą kul. Badaniom poddano materiały różniące się zasadniczo twardością ocenianą według skali Mohsa.

Wypełnienie młyna stanowiły kule stalowe ϕ 25,4 mm oraz kule korundowe ϕ 30 mm, które w poszczególnych próbach mielenia wykorzystywane były w ilościach podanych w tabeli 1.

Tabela 1. Rodzaje i masa mielników użytych w procesie mielenia
Table 1. Types and mass of grinding elements

Rodzaj mielników	Masa mielników [g]	Liczba sztuk
Kule korundowe	1150	19
	1392	23
Kule stalowe	1132	17
	1397	21

Materiał wstępnie rozdrobniono oraz przesiewano, otrzymując nadawę o składzie granulometrycznym z przedziału 1–2,5 mm. Miało to na celu otrzymanie surowca możliwie jednorodnego pod względem właściwości wytrzymałościowych.

Proces mielenia realizowano cyklicznie, przy czym w określonych odstępach czasu zatrzymywano młyn, pobierano próbkę 180 g rozdrabnianego materiału i poddawano analizie sitowej, korzystając z zestawu 14 sit o wymiarach oczek: 2; 1,6; 1,25; 1; 0,8; 0,63; 0,5; 0,4; 0,315; 0,2; 0,125; 0,09; 0,071; 0,063 mm.

Po określeniu udziałów masowych na poszczególnych sitach umieszczano ponownie materiał w bębnie i wznawiano proces mielenia. Trwał on dopóty, dopóki udział wagowy frakcji wyjściowej (1–2,5 mm) nie obniżył się do poziomu co najwyżej 2%. Mieleniu poddano: gablo, kwarcyt, sjenit oraz piaskowiec „kopulak”. Ich twardość, ocenianą według skali Mohsa, zestawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Zestawienie twardości materiałów użytych do mielenia
Table 2. Comparison of hardness of materials being ground

Minerał	Twardość według Mohsa
Piaskowiec	3
Kwarcyt	6
Sjenit	7
Gabro	9

ANALIZA I OCENA PRZEBIEGU PROCESU MIELENIA

W wyniku analizy rozdrobnionych surowców otrzymano udziały masowe poszczególnych klas ziarnowych p_i , %, dla odpowiednich czasów mielenia, które posłużyły jako dane wyjściowe do obliczenia odpowiednich momentów oraz współczynników spłaszczenia i asymetrii.

Do łatwiejszej analizy oceny procesu mielenia sporządzono wykresy zależności $m_1 = f(t)$, $K_1 = f(m_1)$, $K_2 = f(m_1)$. Przedstawiono je na rysunkach 2–6.

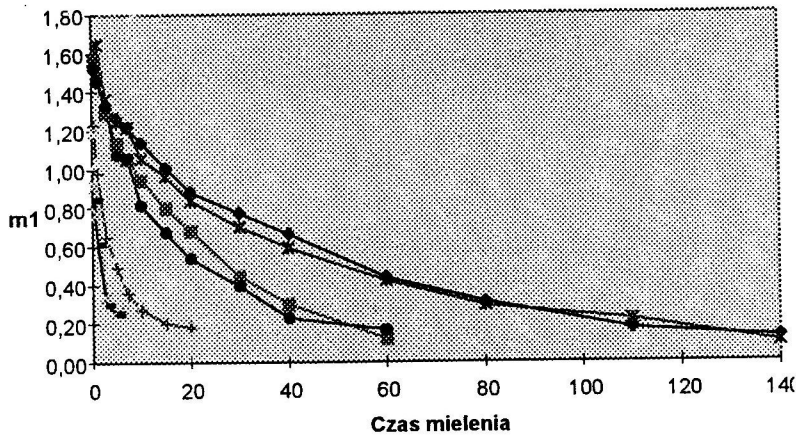
Analiza otrzymanych wykresów pokazanych na rysunkach 3, 4, oraz 5 i 6 wskazuje na występowanie ścisłych zależności między średnim wymiarem ziarna, rozumianym jako wartość momentu m_1 , a wartościami współczynników spłaszczenia K_1 i asymetrii K_2 . Są one o podobnym charakterze dla wyników ze wszystkich prób mielenia wykonanych przy różnych parametrach procesowych.

Korzystając z propozycji Heima i Pietrzykowskiego (1993) oraz Heima (1993), zależności powyższe opisano korelacjami postaci:

$$K_1 = e^{(a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2)} - 3 \quad (8)$$

$$K_2 = b_0 + b_1 m_1^2 + b_3 m_1^3 \quad (9)$$

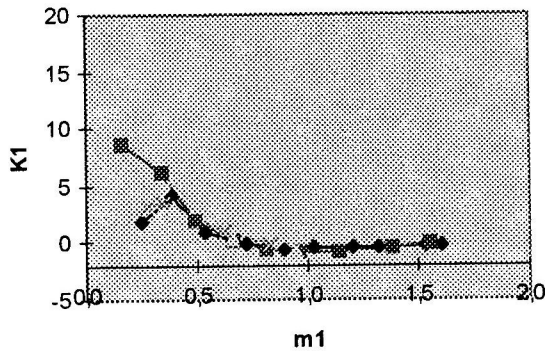
Obliczono wartości współczynników stałych w powyższych równaniach, wartości współczynników korelacji dla tych równań wynoszą odpowiednio $r = 0,857-0,965$ dla $K_1 = f(m_1)$ i $r = 0,933-0,983$ (dla $K_2 = f(m_1)$).



Rys. 2. Zmiana w czasie wymiaru ziarna średniego ($V = \text{const}$)

◆ – gabro, $m_d = 1150$ g; □ – kwarcyt, $m_d = 1150$ g; Δ – sjenit, $m_d = 1150$ g; × – kopulak, $m_d = 1150$ g;
 × – gabro, $m_d = 1392$ g; – kwarcyt, $m_d = 1392$ g; – sjenit, $m_d = 1392$ g; – kopulak, $m_d = 1392$ g;

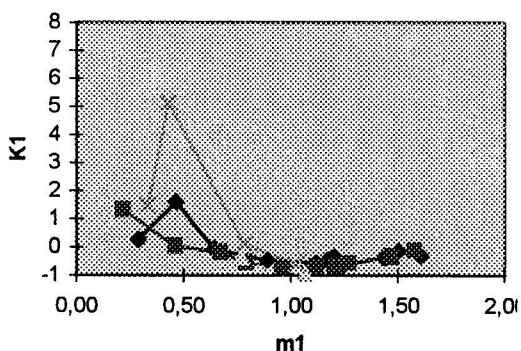
Fig. 2. Changes of mean particle size with time ($V = \text{const}$)



Rys. 3. Zależność między współczynnikiem spłaszczenia a wymiarem ziarna średniego, kule stalowe ($m_s = 1397$ g), wsad 300 cm^3

◆ – gabro, wsad 300 cm^3 ; □ – kwarcyt, wsad 300 cm^3 ;
 Δ – sjenit, wsad 300 cm^3 ; × – kopulak, wsad 300 cm^3 ;

Fig. 3. Dependence of the flattening coefficient K_1 on mean particle size, steel balls ($m_s = 1397$), feed 300 cm^3



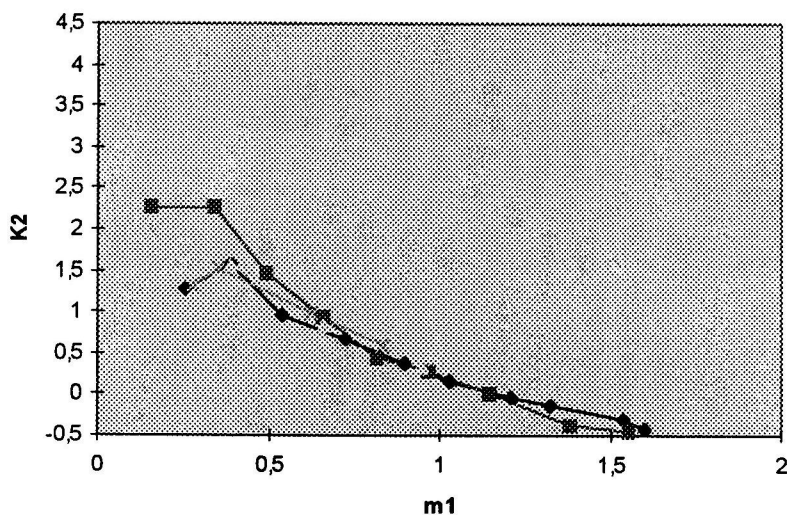
Rys. 4. Zależność między współczynnikiem spłaszczenia K_1 a wymiarem ziarna średniego,

kule stalowe ($m_s = 1397$ g), wsad 450 cm^3

$\diamond$ – gabro, wsad 450 cm^3 ; $\square$ – kwarcyt, wsad 450 cm^3 ;

Δ – sjenit, wsad 450 cm^3 ; $\times$ – kopulak, wsad 450 cm^3 ;

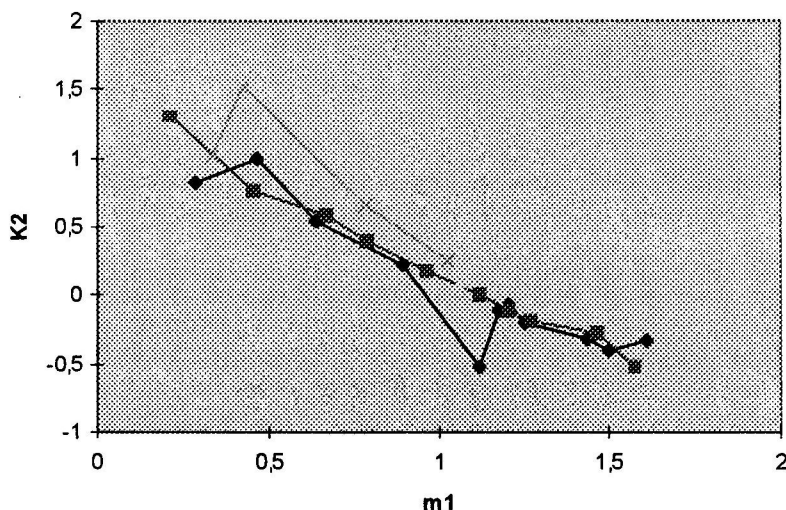
Fig. 4. Dependence of the flattening coefficient K_1 on mean particle size, steel balls ($m_s = 1397$), feed 450 cm^3



Rys.5. Zależność między współczynnikiem asymetrii funkcji rozkładu K_2 ziaren a wymiarem ziarna średniego m_1 (wsad 300 cm^3)

$\diamond$ – gabro, $\square$ – kwarcyt, Δ – sjenit, $\times$ – kopulak,

Fig. 5. Dependence of the asymmetry coefficient of particle distribution function K_2 on mean particle size m_1 (feed 300 cm^3)



Rys.6. Zależność między współczynnikiem asymetrii funkcji rozkładu K_2 wymiarów ziaren a wymiarem ziarna średniego m_1 (wsad 450 cm³)

◆ – gabro, □ – kwarcyt, △ – sjenit, × – kopulak,

Fig. 6. Dependence of the asymmetry coefficient of particle distribution function K_2 on mean particle size m_1 (feed 450 cm³)

WNIOSKI KOŃCOWE

Wyniki przeprowadzonych badań umożliwiają sformułowanie następujących wniosków:

1. Charakter zależności między współczynnikiem spłaszczenia a wymiarem ziarna średniego, którego wartość zmienia się w czasie mielenia, jest taki sam niezależnie od podatności materiału na rozdrabnianie oraz warunków prowadzenia procesu w młynie kulowym. Identyczny wniosek można sformułować odnośnie zależności między współczynnikiem asymetrii a wymiarem ziarna średniego.

2. Warunki procesowo-aparaturowe mają wpływ na wartość stałych występujących w równaniach korelacyjnych opisujących zależności między współczynnikami spłaszczenia oraz asymetrii a wymiarem ziarna średniego.

3. Zastosowanie teorii momentów do opisu procesu rozdrabniania w młynie kulowym wydaje się bardzo obiecujące i daje w pełni zadowalające wyniki.

4. Dla potwierdzenia zaobserwowanych prawidłowości oraz uzyskania podstaw do uogólnień konieczne jest rozszerzenie zakresu badań obejmujące m. in. zmianę częstości obrotowej bębna.

LITERATURA

HEIM A., PIETRZYKOWSKI M.(1993), *Grinding in a ball mill*, Powder Handling & Processing, Vol. 5, No. 4, s. 363.

HEIM A.(1993), *Determination of particle size distribution of ground material*, Rudy Metale, Vol. 38, No. 3, s. 74.

Heim A., Olejnik T. (1996), Grinding process in a ball mill described by the statistical moment theory, *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 30, 85–94 (Polish text)

This paper contains the analysis of the results of researching disintegration of ground materials in the ball mill. Disintegration was conducted in a laboratory mill (6 dm³ capacity and 200 mm of inner diameter). Milling tests have been carried out for few types of ground materials which differed in Mohs' hardness. Materials were screened during the milling process and the results were used to describe kinetics of the milling process according to the moment theory. The moment theory could describe in time the grain-size distribution of the ground material using ordinary and central moments and their functions: the concentration coefficient and the distribution asymmetry coefficient.