

- [32] Dołżeńkova A.N., Strielcyn G.S.: Izmenienije potencjała kwarca w prisutstwiiji modifikatorow i kationnowo stabizatiela, Sbornik "Niekatoryje woprosy teorii i technologii obogaszczenija rud", Leningrad 1962 r.
- [33] Berger G.S.: Flotacja minerałow, Moskwa 1957 r.
- [34] Grosman Z.I., Chadźijew P.G.: Isledowanije usłowija podawlenija sulfidnych minerałow osadkami wzaimodiejstwija depresorow, Praca Instytutu Mechanobr - Leningrad 1964 r.
- [35] Waksmundzki A., Szczypa J.: Wpływ stężenia zemulgowanych węglowodorow na potencjał elektrokinetyczny siarki. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo z. 11, 1964 r.

Mgr inż. JANUSZ LEKKI
Instytut Metali Nieżelaznych
w Gliwicach

ZASTOSOWANIE METODY BOXA-WILSONA DO BADAN PROCESU FLOTACJI

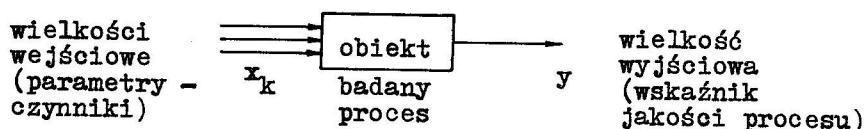
Zadanie eksperymentatora to wszechstronne przebadanie, tak mechanizmu procesu, jak i własności substancji. Opierając się na rezultatach takich badań, można przedstawić teorię procesu, za pomocą której będą rozwiązywane zagadnienia optymalizacji, czyli podanie takich warunków procesu, które zapewnią maksymalny uzysk, zawartość metalu itp. Badanie tego rodzaju bardzo rzadko znajduje zastosowanie przy rozwiązywaniu zadań technologicznych, ponieważ procesy te są złożone i tym samym trudne do teoretycznego opracowania. W większości przypadków zagadnienia te rozwiązuje się eksperymentalnie, przy niepełnej znajomości mechanizmu procesu, a zadaniem eksperymentatora jest jedynie dojście do warunków optymalnych [1].

Rezultat danego procesu oceniamy zwykle jakimś jednym, technologicznie uzasadnionym wskaźnikiem. Dla reakcji chemicznej może to być procentowa zawartość produktu, dla procesu flotacji uzysk, procentowa zawartość metalu, cena produktu i in. Ten parametr oceniający proces, w dalszej części pracy jest nazywany wskaźnikiem jakości procesu i oznaczamy go przez y . Jego geometryczne przedstawienie nazywamy powierzchnią ja-

kości procesu, zmienne parametry nazywamy czynnikami i oznaczamy przez x_1 .

Badanie prowadzi się dla znalezienia związku między czynnikami, a wskaźnikiem jakości procesu abstrahując od elementarnych procesów zachodzących w obiekcie. Jest to nowe podejście z dziedziny automatyki i cybernetyki i pozwala optyimizować złożone systemy, które dawniej rozpatrywało się tylko intuicyjnie.

W języku automatyki zadanie przedstawia się następująco: mamy do czynienia z układem o następującym schemacie blokowym

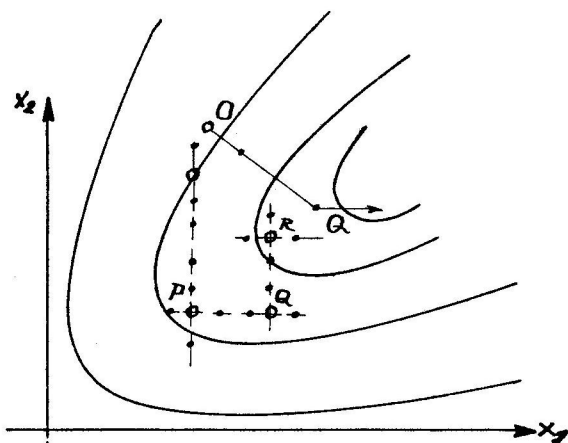


Zadanie polega na wyznaczeniu i dobraniu takiego zespołu wielkości wejściowych $x_1, x_2, \dots, x_k$ obiektu, które odpowiadają punktowi maksimum wielkości wyjściowej $y(x_1, x_2, \dots, x_k) = \max$ czyli znalezieniu optymalnych wielkości parametrów. Szukanie optimum można prowadzić metodą tradycyjną, która jest najprostszą formą szukania zorganizowanego lub metodą gradientu.

Tradycyjna metoda szukania optimum polega na maksymalizacji y ze względu na x_1 a następnie na x_2 itd. Po zakończeniu cyklu maksymalizacji ze względu na wszystkie zmienne, powtórnie ze względu na x_1 następnie x_2 itd. aż do uzyskania optimum.

Szukanie metodą gradientu polega na pomiarze składowych gradientu w punkcie początkowym (rys. 1 punkt 0) a następnie na wykonaniu kroku roboczego o kierunku określonym przez gradient. Po znalezieniu się w nowym punkcie, ponownie określa się gradient i wykonuje następny krok roboczy.

Dla porównania obu metod na rys. 1 przedstawiono graficznie szukanie optimum dla najprostszego układu dwu zmiennych x_1 i x_2 dwoma metodami. Tradycyjnie prowadzone badanie (linia przerywana) polega na ustaleniu jednej zmiennej x_1 i wykonywaniu doświadczeń (oznaczonych czarnymi punktami) przy



Rys. 1

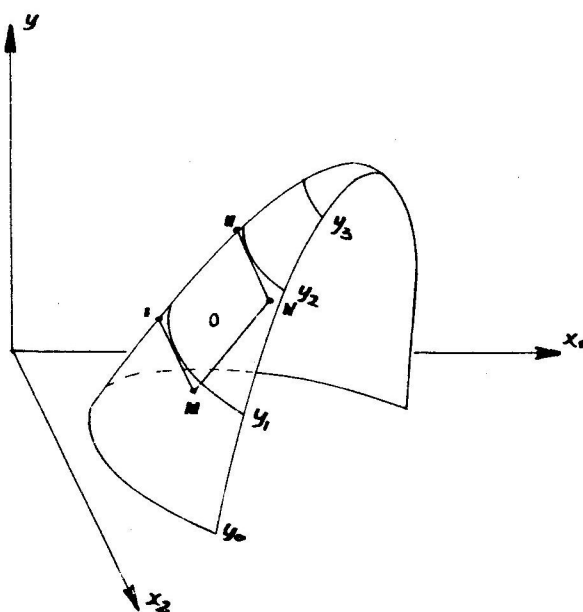
różnych wartościach x_2 . Po dojściu do punktu P następne doświadczenie wykazuje spadek y wskaźnika jakości procesu. Dlatego następne serie doświadczeń prowadzimy od punktu P zmieniając x_1 przy stałej wartości x_2 do przekroczenia punktu Q, następnie do punktu R itd.

Metodą gradientu, linia ciągła polega na znalezieniu normalnej do krzywej w punkcie O. Normalna ta jest kierunkiem gradientu czyli jest drogą najkrótszą do optimum. Po wyznaczeniu tego kierunku prowadzimy doświadczenia na tej linii, aż do przekroczenia punktu Q. W punkcie Q niezbędne będzie wykonanie nowej serii doświadczeń dla uzyskania nowego kierunku.

Zastosowanie przez Boxa czynnikowego planowania doświadczeń pozwoliło obniżyć ilość prób do minimum uzyskując składowe gradientu. Porównanie wymienionych metod prowadzenia badań nasuwa wniosek, że najlepszą strategią prowadzenia badań będzie podejście "krokami" po linii gradientu, a następnie przeprowadzenie dużej serii doświadczeń dla opisanie obszaru optimum równaniami regresji drugiego a nawet trzeciego rzędu. Przy takiej strategii prowadzenia badań, w tej części powierzchni jakości procesu, która jest najbardziej interesująca dla eksperymentatora (obszar optimum) występuje największe zagęszczenie

doświadczeń, a dojście do niej następuje najkrótszą drogą, przy minimalnej ilości doświadczeń.

Matematyczne podstawy metody podał Box i Wilson [2]. Zastosowanie metody do planowania laboratoryjnych prób flotacji podał Mitrofanow [3] i inni [4], [5]. Dla wyjaśnienia idei metody, zastosowano interpretację graficzną [4]. Rozpatrzmy przykład doświadczenia dwuczynnikowego. Mamy do czynienia z układem trójwymiarowym i interpretacja powierzchni jakości procesu jest faktyczna. Rozpatrujemy układ x_1, x_2, y gdzie: x_1, x_2 są parametrami zmiennymi, y - jest wskaźnikiem jakości procesu.



Rys. 2

Rozpatrując proces flotacji rudy miedzi przy stałej ilości 2-merkaptobenzotiazolu jako zbieracza, szukamy optymalnego zużycia terpineolu (x_1) oraz optymalnej wartości pH (x_2), za wskaźnik jakości procesu bierzemy uzysk. Zależność uzysku od pH i ilości terpineolu nie jest znana; w układzie współrzed-

nych trójwymiarowych przedstawia powierzchnię (rys. 2), którą ogólnie możemy zapisać wyrażeniem

$$y = f(x_1, x_2) \quad (1)$$

gdzie: f jest funkcją ciągłą nie posiadającą punktów osobliwych. Na powierzchni (1) obieramy punkt 0 o współrzędnych $(x_1)_0$ i $(x_2)_0$ (co uwidoczniło na rys. 2 i 3) i przenosimy współrzędne układu do tego punktu.

Nowe osie współrzędnych prowadzimy równolegle do starych, zmieniając skalę, co wyrazi się równaniem:

$$X_1 = \frac{x_1 - (x_1)_0}{s_1} \quad \text{ i } \quad X_2 = \frac{x_2 - (x_2)_0}{s_2} \quad (2)$$

gdzie: s oznaczają współczynniki skali.

Mały skrawek powierzchni w otoczeniu punktu 0 możemy określić płaszczyzną o równaniu:

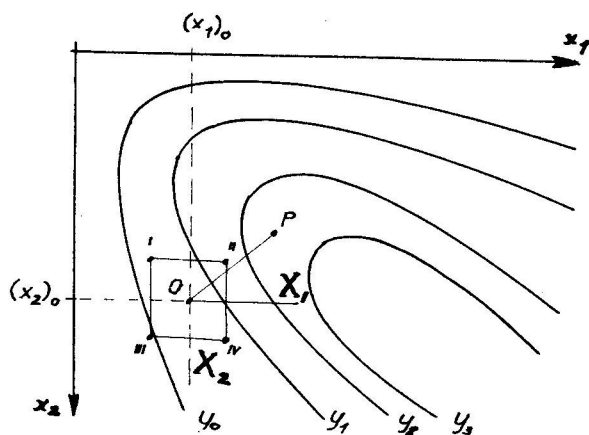
$$y = f(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots \quad (3)$$

Równanie to otrzymujemy rozkładając funkcję (1) w szereg Taylora i biorąc jedynie jego pierwsze człony.

Praktycznie wybór punktu 0 na płaszczyźnie (1) jest to zaplanowanie doświadczenia, które będzie średnią w pierwszej serii doświadczeń i dalej będzie nazywane doświadczeniem bazowym lub poziomem zerowym. Dobranie współczynników skali praktycznie jest dobraniem wielkości o jaką będzie się zmieniał parametr, którą to wielkość nazwano jednostką zmienności.

W naszym przypadku planujemy doświadczenie bazowe biorąc: zużycie terpineolu $(x_1)_0 = 62,5$ g/t oraz pH - $(x_2)_0 = 7,5$ (z danych technologicznych jesteśmy pewni, że w tych warunkach zachodzi już proces flotacji), następnie ustalamy jednostkę zmienności parametrów $s_1 = 12,5$ g/t, $s_2 = 0,5$ czyli w planowanej serii doświadczeń będziemy zmieniać stężenie terpineolu

dając albo 75 g/t albo 50 g/t pH będzie przyjmowało wartość albo 7 albo 8. Dla otrzymania danych do równania (3) w punkcie 0 symetrycznie planujemy doświadczenia, to jest tak aby suma dodatnich odchyień od doświadczenia bazowego równała się sumie odchyień ujemnych. Wtedy $\Delta x_k = 0$, a ponieważ we współrzędnych X_1, X_2 posiadamy skalę, której jednostka jest jednostką zmienności danego parametru, to każdy z parametrów w nowych współrzędnych przyjmuje wartości albo (+1) albo (-1). Mając do czynienia z dwoma zmiennymi na dwu poziomach, wykorzystujemy pełną ilość ich kombinacji tj. cztery. Dane układamy w tablicę (dla ilustracji przedstawiono na rys. 3).



Rys. 3

Tablica 1

Doświadczenie		X_1	X_2	y
"	I	-1	-1	y_I
"	II	+1	-1	y_{II}
"	III	-1	+1	y_{III}
"	IV	+1	+1	y_{IV}

W tabelicy 1 podano parametry w układzie X_1X_2 - jest to układ bezwymiarowy, warunki eksperymentów musimy podać w układzie x_1 - zużycie terpineolu g/t, x_2 pH mętów, zatem należy posłużyć się równaniem (2), wtedy warunki pierwszego doświadczenia będą następujące:

$$x_{1_I} = (x_1)_0 + X_1s_1 = 62,5 + (-1) 12,5 = 50 \quad X_1 - \text{z tabelicy 1}$$

$$x_{2_I} = (x_2)_0 + X_2s_2 = 7,5 + (-1) 0,5 = 7$$

W taki sam sposób obliczamy warunki pozostałych doświadczeń

$$x_{1_{II}} = 75, \quad x_{2_{II}} = 7, \quad x_{1_{III}} = 50, \quad x_{2_{III}} = 8$$

$$x_{1_{IV}} = 75, \quad x_{2_{IV}} = 8$$

Po zrealizowaniu tak zaplanowanych doświadczeń możemy przystąpić do obliczenia współczynników płaszczyzny aproksymującej wybrany skrawek powierzchni jakości procesu.

Gdy aproksymacja powierzchni 1 płaszczyzną (3) jest prawdziwa współczynniki a_k w równaniu (3) można obliczyć metodą minimalizacji kwadratowych odchyleń, otrzymując następujące wzory:

$$a_0 = \frac{\sum y}{\sum X^2} \quad a_1 = \frac{\sum X_1 y_1}{\sum X^2} \quad a_2 = \frac{\sum X_2 y_2}{\sum X^2} \quad (4)$$

Dla znalezienia $X_k y_k$ należy wynik każdego doświadczenia pomnożyć przez wartość X z tabelicy 1.

Wyliczenie $\sum X^2$ wymaga podniesienia do kwadratu wielkości X_k , a ponieważ każdy kwadrat równa się jedności, to ich suma będzie równa ilości doświadczeń N , czyli otrzymamy wzory:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum y \quad a_1 = \frac{1}{N} \sum x_1 y_1 \quad a_2 = \frac{1}{N} \sum x_2 y_2 \quad (5)$$

po podstawieniu wielkości x z tablicy 1 otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \{ (+1) \cdot y_I + (+1) \cdot y_{II} + (+1) \cdot y_{III} + (+1) \cdot y_{IV} \} \\ a_1 &= \frac{1}{4} \{ (-1) \cdot y_I + (+1) \cdot y_{II} + (-1) \cdot y_{III} + (+1) \cdot y_{IV} \} \quad (6) \\ a_2 &= \frac{1}{4} \{ (-1) \cdot y_I + (-1) \cdot y_{II} + (+1) \cdot y_{III} + (+1) \cdot y_{IV} \} \end{aligned}$$

Ponieważ zrealizowane doświadczenia dały następujące wyniki

$$y_I = 52,2 \quad y_{II} = 52,8 \quad y_{III} = 54,2 \quad y_{IV} = 64,1$$

to odpowiadające im współczynniki obliczone wg wzoru (6) wyniosą:

$$a_0 = 55,8 \quad a_1 = 5,45 \quad i \quad a_2 = 3,33$$

Obliczone współczynniki a_1 i a_2 równają się pochodnym cząstkowym funkcji (3)

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} j = a_1 i + a_2 j \quad (7)$$

i, j – wektory jednostkowe osi

i z tym większą dokładnością określają gradient powierzchni (1) im mniejszą jednostkę zmienności parametrów zastosujemy, jednak należy zaznaczyć, że zbyt mała zmiana parametrów może dać efekt mieszczący się w granicach błędów pomiarowych.

Jeżeli teraz przeprowadzimy serię doświadczeń idąc "krokami" (określonymi równościami $x_1 = a_1 s_1$ $x_2 = a_2 s_2$) w kierunku gradientu osiągniemy punkt P rys. 3, gdzie będzie konieczne przeprowadzenie następnej serii eksperymentów koniecznych dla uzyskania nowego kierunku.

Obliczony "krok" dla naszego przykładu:

$$a_1 s_1 = 5,45 \cdot 12,5 = 68,1 \quad a_2 s_2 = 3,33 \cdot 0,5 = 1,66$$

czyli warunki następnego doświadczenia wyniosą:

$$x_1 = (x_1)_0 + a_1 s_1 = 62,5 + 68,1 = 130 \text{ g/t}$$

$$x_2 = (x_2)_0 + a_2 s_2 = 7,5 + 1,66 = 9,1$$

Jak to wynika z przykładu przytoczonego niżej są one bliskie warunkom optymalnym.

Dla wyjaśnienia toku prostych obliczeń i zapisów metody gradientu podamy przykład flotacji rudy miedzi przytoczony poprzednio, jednak przy trzech czynnikach zmiennych

x_1 - zużycie 2-merkaptobenzotiazolu w g/t

x_2 - " terpineolu w g/t

x_3 - wartość pH metów

W pierwszej kolejności wypisujemy badane parametry i określamy warunki doświadczenia bazowego czyli stopień podstawowy. Po ustaleniu jednostki zmienności poszczególnych parametrów, przez dodanie jej do stopnia podstawowego otrzymujemy stopień górny, przez odjęcie zaś stopień dolny. Układamy macierz planowania doświadczeń, do tablicy wpisując dla skrócenia (+) lub (-) zamiast (+1) lub (-1). Wszystkie wielkości zbieramy w tablicę.

Po wykonaniu doświadczeń wg tablicy 2 rezultaty doświadczeń wpisujemy przy numerach poszczególnych eksperymentów, następnie obliczamy współczynniki a_k wg wzorów

$$a_0 = \frac{\sum \bar{\epsilon}}{n} = \bar{\epsilon} = 57,9$$

$$a_1 = \frac{\sum x_1 \cdot \bar{\epsilon}}{n} = 2,1$$

$$a_2 = \frac{\sum x_2 \cdot \bar{\epsilon}}{n} = 4,8$$

$$a_3 = \frac{\sum x_3 \cdot \bar{\epsilon}}{n} = 2,7$$

Tablica 2

Wskaźniki	MBT g/t	terp. g/t	pH	
Stopień podstawowy	125	62,5	7,5	
Jedn. zmienności s_k	25	12,5	0,5	
Poziom wyższy (+)	150	75	8	
" niższy (-)	100	50	7	
Doświadczenie 1	+	+	+	68,8
" 2	+	+	-	65,0
" 3	+	-	+	55,4
" 4	+	-	-	50,7
" 5	-	+	+	64,1
" 6	-	+	-	52,8
" 7	-	-	+	54,2
" 8	-	-	-	52,2

oraz obliczamy "krok roboczy" $a_k s_k$ biorąc s , z tablicy 2

$$a_1 s_1 = 52,5$$

$$a_2 s_2 = 60$$

$$a_3 s_3 = 1,4$$

Po dodaniu obliczonego kroku do stopnia podstawowego (tablica 2) otrzymujemy warunki do realizacji dalszych doświadczeń. Wszystkie dane zbieramy w tablicę 3.

Jak wynika z tablicy 3 w tym wypadku za pomocą jednego kroku otrzymaliśmy wynik leżący w obszarze optimum. W dalszej części doświadczeń należy dokładnie przebadać poszczególne czynniki dla zlokalizowania tego obszaru.

Idea metody Boxa i Wilsona polega na posługiwaniu się tzw. drobnymi replikami od pełnego doświadczenia czynnikowego co wyjaśnimy na przykładzie. Jeżeli chcemy otrzymać liniowe przybliżenie powierzchni uzysków przy czterech czynnikach to wy-

Tablica 3

Wskaźniki	MBT g/t	terp. g/t	pH	%
Współczynnik a_k	2,1	4,8	2,7	
Krok roboczy $a_k \cdot s_k$	52,5	60	1,4	
Obliczone warunki doświadczenia	177	122,5	8,9	
Warunki doświadc. zrealizowane	175	120	9,0	90,4

Tablica 4

Warunki	DET g/t	Na ₂ CO ₃ kg/t	terp. g/t	czas miel. min.	
Stopień podstaw.	50	0,5	120	20	
Jedn. zmienności	10	0,5	30	5	
Stopień górny	60	1	150	25	
Stopień dolny	40	0	90	15	
Doświadczenie 1	-	-	-	-	69,10
" 2	+	-	+	-	74,91
" 3	-	-	+	+	70,98
" 4	-	+	-	+	83,81
" 5	+	+	-	-	80,66
" 6	+	-	-	+	76,46
" 7	-	+	+	-	80,25
" 8	+	+	+	+	84,94
Współczynniki a_k	0,71	4,71	0,13	1,87	
Krok roboczy $a_k \cdot s_k$	7,1	2,38	3,9	11,2	
Warunki doświad- czenia obliczone	57,1	2,88	123,9	31,2	
Warunki doświad- czenia realizow.	60	3	125	30	86,89

starczy w macierzy 2^3 zastąpić współdziałanie trzech czynników, czwartym badanym. W tablicy 4 podano planowanie oraz wyniki prób flotacji rudy miedzi przy czterech zmiennych czynnikach:

- x_1 - zużycie dwufenyloxiomocznika g/t
- x_2 - CaO kg/t
- x_3 - terpineol g/t
- x_4 - czas mielenia min.

Jak widać z tablicy 4 poziomy czynnika x_4 ustalono przez pomnożenie poziomów $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, otrzymując kierunek gradientu wystarczająco dokładny do określenia obszaru optymalnego, przy dwukrotnie mniejszej liczbie prób, niż dla pełnego doświadczenia czynnikowego, które wymagałoby 2^4 doświadczeń. Obszar optimum wymaga oczywiście jeszcze przebadania dla ustalenia uzysku, który jest maksymalny dla danej rudy.

LITERATURA

- [1] Nalimow W.N., Czernowa N.A.: Statistichieskieje metody planirowanija ekstremalnych eksperimentow. Moskwa 1965.
- [2] Box G.R.P., Wilson K.B.: On the experimental attainment of the optimum conditions, J. Royal Statistical Soc. 1951, i 3 pl. (B).
- [3] Mitrofanow S.J.: Issledowanije poleznych iskopajemych na obogatimost. Moskwa 1962.
- [4] Olewska I.W., Itkin G.E., Maszewski G.N.: Prowiedienije eksperimentalnych issledowanij po principu bystreszewe nachozhdenija optimuma. Obogoszczienije rud, No 3, str. 34, 1965.
- [5] Kopatilow W.J.: O metodikie razrabotki optimalnowo režima flotacji. Obogoszczienije rud, No 3, str. 42, 1965.