

Paweł NOWAK*

TEORIA FRAKTALI - NOWY SPOSÓB OPISU OBIEKTÓW GEOMETRYCZNIE NIEREGULARNYCH

Teoria fraktali jest działem geometrii zajmującym się opisem obiektów, które wykazują nieregularności przy dowolnie dużym powiększeniu i w związku z tym nie mogą być przedstawione przy pomocy odcinków, płaszczyzn, brył geometrycznych. Wspólną cechą fraktali jest własność wewnętrznego podobieństwa, a wielkością charakterystyczną jest tak zwany wymiar fraktalny, który jest najczęściej liczbą ułamkową. W fizyce i chemii teoria fraktali znalazła zastosowanie do opisu takich obiektów i zjawisk, jak powierzchnie chropowate, ciała silnie rozdrobnione, agregacja, turbulencja. W artykule przedstawiono pokrótce podstawy teorii fraktali, a także możliwości jej zastosowania do opisu procesów przeróbki minerałów.

1. WPROWADZENIE

Przytłaczająca większość obiektów występujących w przyrodzie i technice wykazuje znaczną nieregularność geometryczną. Nawet tak pozornie gładkie obiekty jak powierzchnia szyby, czy ostrze zyletki oglądane pod mikroskopem o dostatecznie dużym powiększeniu ukazują niewidoczne gołym okiem nierówności. Pomimo tego do opisu rzeczywistych obiektów stosowano dotychczas proste modele geometryczne, jak płaszczyzna, kula, sześcian. Postępowanie takie jest dopuszczalne, gdy nierówności powierzchni danego obiektu są znikomo małe w porównaniu z samym obiektem lub charakterystycznym wymiarem geometrycznym procesu zachodzącego na jego powierzchni (na przykład grubością warstwy dyfuzyjnej). Jeśli na przykład badamy opadanie w cieczy obiektu o wymiarach centymetrowych, to nieuwzględnienie mikronowych nierówności powierzchni w opisie zjawiska nie spowoduje znaczącego błędu. Jeśli jednak opisywany obiekt ma wymiar kilkudziesięciu mikrometrów, to taka sama chropowatość powierzchni może w istotny sposób zmienić przebieg procesu.

Pierwsze próby matematycznego opisu obiektów wykazujących silne nieregularności pojawiły się już w drugiej połowie XIX wieku, ale dopiero teoria fraktali, która powstała w latach siedemdziesiątych obecnego wieku głównie dzięki pracom Mandelbrota (1) stworzyła odpowiednie podstawy teoretyczne. Lata osiemdziesiąte to okres rosnącego zainteresowania zastosowaniem teorii fraktali do opisu układów występujących w przyrodzie i technice - na początku lat osiemdziesiątych liczba prac, w których geometrię fraktalną zastosowano do opisu zjawisk fizycznych, nie przekraczała kilkunastu rocznie - obecnie dochodzi do tysiąca (2).

* Instytut Katalizy i Fizykochemii Powierzchni PAN, ul. Niezłomnych 1, 30-239 KRAKÓW

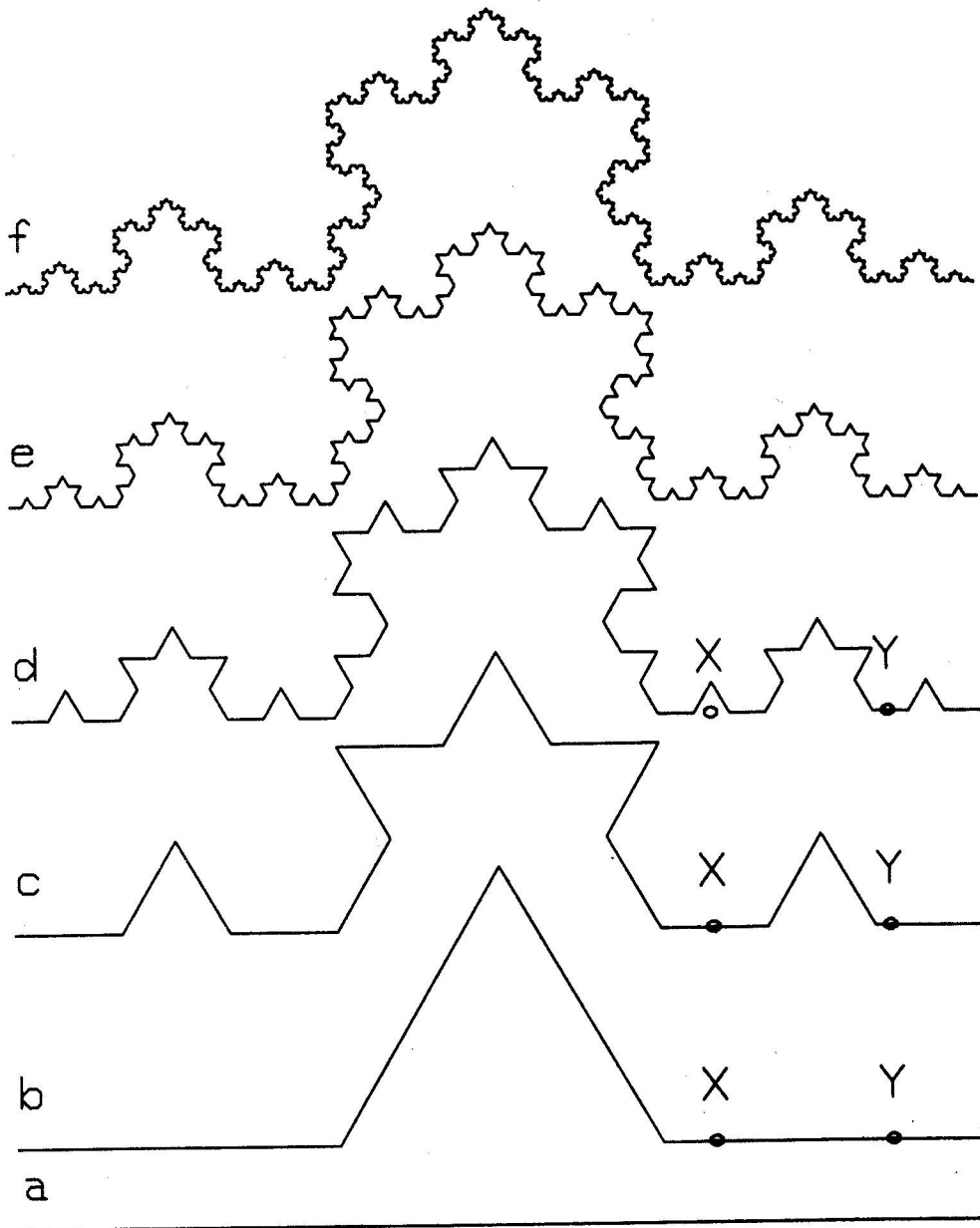
Opis geometrycznej nierównomierności oraz fizycznej i chemicznej niejednorodności materiałów jest w teorii procesów przerobczych zagadnieniem niezwykle istotnym. Minerale w procesach przerobczych rzadko występują w postaci dużych i homogenicznych pod względem składu monokryształów. Zwłaszcza obecnie, gdy zachodzi konieczność przerobu coraz bardziej ubogich rud, technolog ma zwykle do czynienia z rudą składającą się z wielu minerałów w stanie silnego rozdrobnienia. Jedną z pierwszych operacji technologicznych w procesie przeróbki jest zwykle mielenie - w jego wyniku otrzymuje się zazwyczaj materiał polidispersyjny, o wysoce nieregularnym kształcie ziaren odznaczających się dużą chropowatością i niehomogenicznością. Przeróbka rud jest więc niezwykle wdzięcznym polem do zastosowania teorii fraktali. Niestety, w literaturze z tej dziedziny brak jest prac, w których zastosowano by teorię fraktali do opisu układów występujących w przeróbce rud.

W prezentowanym artykule omówiono podstawy geometrii fraktalnej oraz, na podstawie przykładów zaczerpniętych z zakresu chemii fizycznej, przedstawiono możliwości zastosowania teorii fraktali w opisie procesów przeróbki kopalin.

2. CO TO SĄ FRAKTALE?

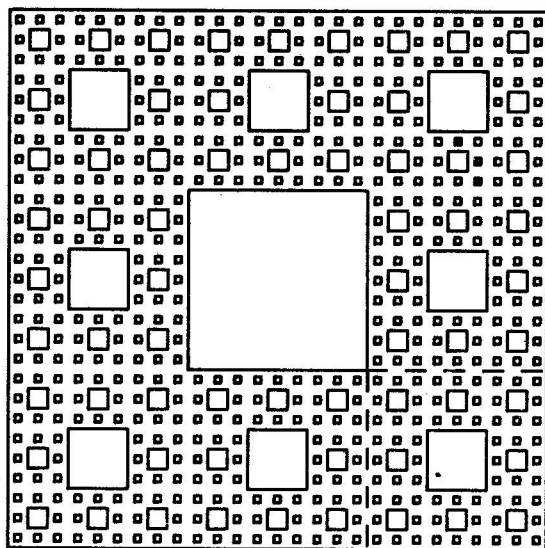
Na rysunku 1 przedstawiona jest konstrukcja jednego z najbardziej znanych fraktali, tzw. krzywej von Kocha. Konstrukcję rozpoczyna się od inicjatora (rys. 1a), którym jest tutaj odcinek prosty. Następnie inicjator zastępuje się generatorem (rys. 1b). Generator składa się również z odcinków prostych - w następnym kroku (rys. 1c) każdy z odcinków składowych generatora zastępuje się takim samym co do kształtu, ale odpowiednio pomniejszonym generatorem. Przeprowadzając takie postępowanie nieskończenie wiele razy otrzymuje się fraktal - oczywiście w praktyce nie można przeprowadzić nieskończenie wielu kroków postępowania, wszystkie przedstawione na rysunku 1 obiekty są łamanymi i stanowią jedynie kolejne przybliżenia fraktalu. W procesie konstrukcji fraktalu przedstawionego na rysunku 1 na każdym kroku odcinek o długości jednostkowej zastępuje się odcinkiem o długości $4/3$. Jeśli więc długość inicjatora przyjmiemy za jednostkę, to w kolejnych krokach konstrukcji otrzymamy łamane o długości: $4/3$, $16/9$, $64/27$, $256/81$ Po nieskończeniu wielu krokach długość krzywej będzie nieskończenie wielka. Jeśli po dowolnym stopniu konstrukcji wybierzemy dwa punkty leżące na jednym odcinku (punkty X i Y na rysunku 1), to po wykonaniu pewnej ilości dodatkowych kroków punkty nie będą już leżały na tych samych odcinkach - nie jest więc możliwe przeprowadzenie stycznej do żadnego punktu na krzywej, co oznacza, że krzywa nie ma w żadnym punkcie pochodnej.

Krzywa von Kocha jest fraktalem liniowym - jej inicjator jest obiektem jednowymiarowym. Przykład fraktalu powierzchniowego przedstawiono na rysunku 2. Inicjatorem jest tu kwadrat (obiekt dwuwymiarowy). Konstrukcja przebiega w ten sposób, że kwadrat dzieli się na 9 kwadratów o boku $1/3$ (bok dużego kwadratu przyjmuje się za jednostkę) i "wycina się" środkową część. Pozostałe 8 kwadratów dzieli się znów, każdy na 9 części i z każdego "wycina się" środek. Po nieskończeniu wielu takich krokach otrzymuje się fraktal o nazwie dywan Sierpińskiego - rysunek 2 przedstawia figure



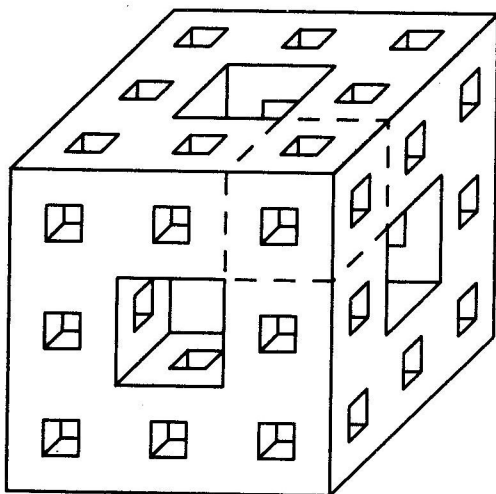
Rys. 1. Kolejne przybliżenia krzywej von Kocha od stopnia 1 (1a) do 6 (1f).

Fig. 1. Consecutive approximations of the von Koch curve construction from the first (1a) to the sixth step (1f)



Rys. 2. Dywan Sierpińskiego - konstrukcja zakończona po czterech pierwszych krokach

Fig. 2. Sierpiński's carpet - the construction finished after the first four steps



Rys. 3. Gąbka Menger'a - konstrukcja zakończona po trzech pierwszych krokach

Fig. 3. Menger's sponge - the construction finished after the first three steps

będącą czwartym krokiem konstrukcji fraktalu. Po kolejnych krokach konstrukcji powierzchnia figury wynosi (powierzchnię początkowego kwadratu przyjmuje się za 1): $8/9$, $64/81$, $512/729$ Po nieskończeniu wielu krokach otrzymuje się powierzchnię równą zeru. Czy oznacza to jednak, że omawiany fraktal jest tworem liniowym o wymiarze 1? Dla prostych obiektów geometrii euklidesowej takich jak krzywe, figury, bryły można zwykle bez trudu określić wymiar obiektu w sposób intuicyjny. Dla przedstawionego obiektu nie jest to takie proste. W celu wyznaczenia wymiaru dywanu Sierpińskiego można posłużyć się następującym rozumowaniem. Dla prostych obiektów euklidesowych zawartość obiektu (długość, powierzchnia lub objętość) zależy od wymiaru obiektu w sposób wykładniczy:

$$C = A \cdot L^d \quad (1)$$

gdzie C to zawartość zbioru, L to jego miara liniowa (średnica), a d to wymiar topologiczny. Na przykład: dla okręgu $A = \pi$, dla koła $A = \pi/4$, a dla sześcianu $A = 1$. Jeśli więc średnicę zbioru powiększymy f -krotnie, to jego zawartość zwiększy się

$$C_f = A \cdot (f \cdot L)^d = A \cdot f^d \cdot L^d = f^d \cdot C \quad (2)$$

f^d krotnie, co można również wyrazić wzorem:

$$d = \log(C_f/C) / \log(f) \quad (3)$$

Zbiór przedstawiony na rys. 2 (a raczej to, co powstałoby po nieskończeniu wielu krokach konstrukcji) można podzielić na 8 identycznych części (na przykład część odcięta na rysunku 2 linią kreskową) o boku równym $1/3$. Po trzykrotnym powiększeniu średnicy zbioru każda z tych części staje się identyczna ze zbiorem wyjściowym. Na mocy wzoru (3) otrzymujemy więc:

$$D = \log(k) / \log(f) = \log(8) / \log(3) = 1,892 \dots \quad (4)$$

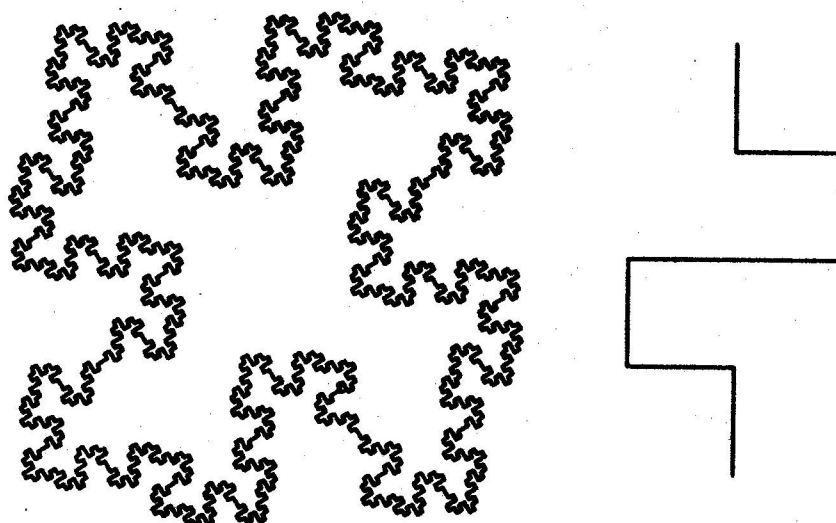
co oznacza, że tak wyznaczony wymiar zbioru jest liczbą ułamkową. Należy tu podkreślić, że zgodnie z topologiczną definicją wymiaru jest on zawsze liczbą całkowitą (wymiar topologiczny dywanu Sierpińskiego wynosi 1). Wymiar określony wzorem (3) nazywany jest wymiarem fraktalnym zbioru i ułamkowa wartość wymiaru oznacza, że w niektórych przekształceniach geometrycznych (przekształcenie podobieństwa na przykład) zachowuje się on jak gdyby miał wymiar ułamkowy. Można łatwo sprawdzić, że obiekty euklidesowe mają wymiar fraktalny całkowity i równy wymiarowi topologicznemu, podczas gdy dla fraktali wymiar fraktalny jest zawsze różny od wymiaru topologicznego (choć niekoniecznie ułamkowy).

Na rysunku 3 przedstawiono przykład fraktalu objętościowego. Inicjatorem jest tu sześcian. Sześcian ten dzieli się na 27 mniejszych sześcianów o boku $1/3$ i usuwa się po

Jednym sześcianie ze środka każdej ściany i dodatkowo sześcian znajdujący się wewnątrz. Podobnie postępuje się z każdym z pozostałych 20 sześcianów - po nieskończeniu wielu krokach otrzymuje się fraktal o nazwie gąbka Menger'a i wymiarze fraktalnym $D = \log(20)/\log(3) = 2,726...$. Można zauważyć dalej, że zewnętrzna powierzchnia gąbki Menger'a to po prostu sześć złożonych ze sobą krawędziami dywanów Sierpińskiego ($D=1,892...$). Mamy tu więc przypadek fraktalu przestrzennego, ograniczonego fraktalem powierzchniowym, natomiast w przypadku dywanu Sierpińskiego (rys. 2) mamy do czynienia z fraktalem powierzchniowym, ograniczonym figurą euklidesową (kwadrat). Należy dalej zauważyć, że sumaryczna objętość elementów (sześcianów) usuwanych przy konstrukcji gąbki Menger'a równa jest objętości całego sześcianu - tworzą więc one obiekt nie fraktalny, a euklidesowy, niezależnie od tego jak bardzo jest on "poszatkowany". Podobnie w przypadku dywanu Sierpińskiego, suma elementów (kwadratów) usuwanych równa jest powierzchni kwadratu. Przykład powierzchni euklidesowej ograniczonej fraktalną obwiednią przedstawiony jest na rysunku 4. Można sobie łatwo wyobrazić, że jest to przekrój ziarna minerału otrzymanego w wyniku mielenia i w związku z tym wykazującego silną chropowatość powierzchni, ale nie wykazującego porowatości. Ziarno porowate może być modelowane na przykład gąbką Menger'a. Inicjatorem fraktalu jest tutaj kwadrat (generator pokazany jest w prawej części rysunku). Należy zauważyć, że niezależnie od tego, na którym etapie przerwiemy konstrukcję fraktalnej obwiedni, powierzchnia zawarta wewnątrz figury jest zawsze równa powierzchni wyjściowego kwadratu. Inny przykład fraktalu, który może służyć do modelowania powierzchni porowatej przedstawiono na rysunku 5. Jak widać z rysunku, najbardziej charakterystyczną cechą konstrukcji jest to, że powtarza ona pewne elementy o tym samym kształcie w różnym powiększeniu - to samo można powiedzieć o wszystkich pozostałych przedstawionych w artykule konstrukcjach geometrycznych. Ta właśnie cecha, to znaczy wewnętrzne podobieństwo, jest najbardziej istotną właściwością obiektów fraktalnych. Miara ilościowa wewnętrznego podobieństwa jest współczynnik podobieństwa f (jest to najmniejsza liczba f taka, że po f -krotnym pomniejszeniu zbioru staje się on identyczny ze swoim podzbiorem). Przy f -krotnym pomniejszeniu zbioru jego zawartość zmniejsza się k razy - liczba k nazywa się powiększeniem fraktalnym. Dla krzywej von Kocha z rysunku 1 $f=3$ i $k=4$.

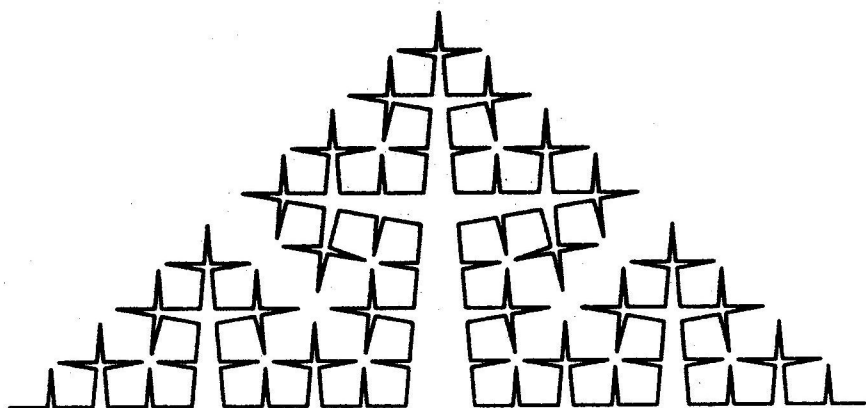
3. ZASTOSOWANIE TEORII FRAKTALI DO OPISU PROCESÓW ROZDRABNIANIA I AGLOMERACJI

W procesie rozdrabniania może często wystąpić sytuacja, że proces pękania ziarna określony jest czynnikami niezależnymi od wielkości ziarna (na przykład wielkością kąta pomiędzy płaszczyznami łupliwości). Można więc oczekiwać, że niezależnie od wielkości ziarna kształt powierzchni ograniczającej będzie podobny. Przebieg procesu rozdrabniania przypomina więc proces budowy struktury fraktalu. Również proces agregacji może przebiegać podobnie do procesu budowy fraktalu. Można sobie na przykład wyobrazić, że kilka cząstek łączy się w jedną większą (pozostawiając w środku wolną przestrzeń), następnie kilka większych cząstek znów łączy się ze sobą, dając w efekcie jeszcze większą itd. W wyniku takiego procesu powstawać mogą struktury przestrzenne przypominające gąbkę Menger'a. W literaturze można znaleźć bardzo wiele prac (2-8), w



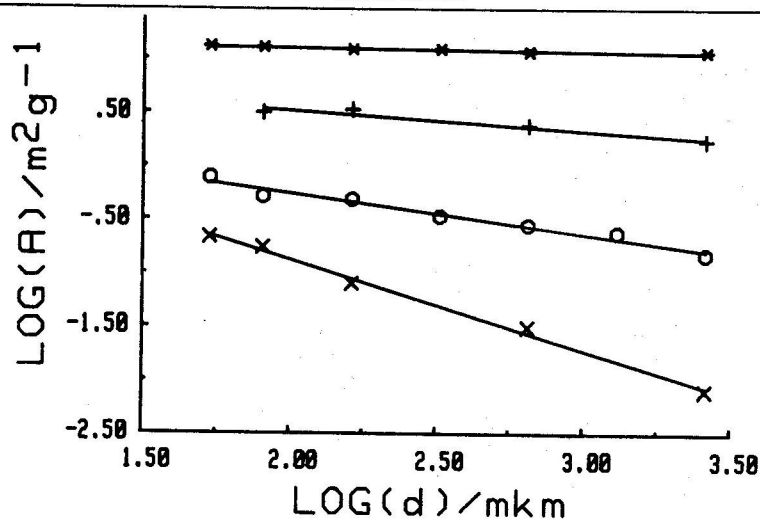
Rys. 4. Powierzchnia euklidesowa ograniczona krzywą fraktalną. Po prawej stronie rysunku generator fraktalu

Fig. 4. Euclidean surface bounded by a fractal line. The generator of the fractal is shown in the right part of the figure



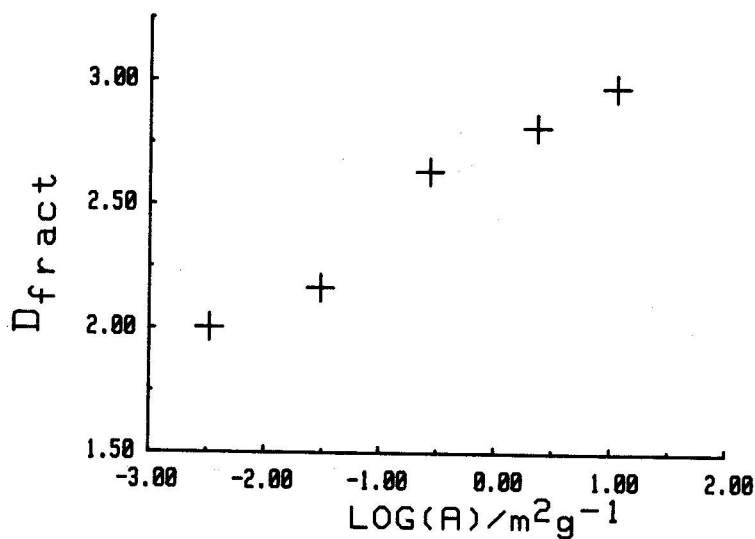
Rys. 5. Krzywa von Kocha ($D=1,785\dots$) która, może symulować przekrój prostopadły do powierzchni silnie porowatego ciała stałego. Konstrukcja zakończona po 5 krokach

Fig. 5. Von Koch curve ($D=1.785\dots$) which may simulate the cross section perpendicular to the surface of a porous solid body. The construction is finished after 5 steps



Rys. 6. Zależność logarytmu powierzchni właściwej od logarytmu średnicy ziarna dla kilku różnych skał węglanowych. Dane zaczerpnięte z pracy Love'a i Whittakera (9)

Fig. 6. The dependence of the logarithm of specific surface area on the logarithm of the particle diameter for a number of different carbonate rocks. Data from the work of Love and Whittaker (9)



Rys. 7. Zależność wymiaru fraktalnego powierzchni kilku skał węglanowych (te same próbki co na rysunku 6) od powierzchni właściwej dla ziaren o średnicy 0,65 mm. Lewy dolny punkt - wartość dla kuli.

Fig. 7. The dependence of the surface fractal dimension on specific surface area for samples of carbonate rocks from fig. 6 - particle diameter 0.65 mm. Lower left point - value calculated for a sphere

których przeanalizowano dostępne dane o układach rozdrobionych z punktu widzenia ich podobieństwa do struktur fraktalnych. Na podstawie analizy cytowanych prac można wysnuć wniosek, że zachowanie "fraktalopodobne" jest dla układów rozdrobionych raczej regułą niż wyjątkiem.

Jak wspomniano w poprzednim paragrafie, zawartość zbioru fraktalnego, mierzona w jednostkach takich, w jakich mierzy się zawartość zbiorów euklidesowych (długość, powierzchnia, objętość) wynosi zero lub nieskończoność, w zależności od tego czy wymiar fraktalny zbioru jest większy czy mniejszy od wymiaru inicjatora. Jeśli jednak konstrukcję fraktalu zatrzymamy po skończonej liczbie kroków, to otrzymujemy obiekt euklidesowy (łamaną, powierzchnię, bryłę), którego zawartość ma wartość skończoną (jest to tak zwana częściowa zawartość fraktalna). Przyjmijmy za jednostkę długości średnicę inicjatora, a za jednostkę zawartości zbioru zawartość inicjatora (jego długość, powierzchnię lub objętość, w zależności od wymiaru topologicznego d inicjatora). Na każdym kroku konstrukcji fraktalu długość generatora ulega f -krotnemu zmniejszeniu, po N krokach wynosić więc będzie :

$$L_N = (1/f)^N, \quad (5)$$

natomiast częściowa zawartość fraktalna po N krokach będzie wynosić:

$$C_N = (k/f^d)^N, \quad (6)$$

Dla układów rzeczywistych nie jest zwykle możliwe wyznaczenie liczby kroków wykonanych przy budowie struktury fraktalnej. Jeśli jednak założymy, że powierzchnia wykazuje nierówności o różnych możliwych wymiarach poczynając od średnicy ziarna, a skończywszy na przykład na liniowym wymiarze tworzących ziarno molekuł, to liczbę N można wyrazić poprzez f , korzystając ze wzoru (5) i zakładając, że $L = (r/R)$, gdzie R to wymiar liniowy ziarna (promień), a r to wymiar liniowy najmniejszych nierówności powierzchni. Wstawiając tak obliczone N do wzoru (6) i korzystając ze wzoru (4) otrzymujemy:

$$C = L^{d-D} = (r/R)^{d-D}, \quad (7)$$

gdzie C to zawartość pojedynczego ziarna o budowie fraktalnej, przy czym C będzie to objętość, jeśli traktujemy ziarno jako fraktal objętościowy (w tym przypadku $d=3$), lub powierzchnia, jeśli traktujemy ziarno jako fraktal powierzchniowy (w tym przypadku $d=2$). Wartość r można co prawda oszacować (na przykład z analizy obrazów mikroskopowych ziaren), ale zwykle zadowalamy się założeniem, że jest ona stała dla rozpatrywanego materiału i sposobu rozdrabniania i piszemy wzór (7) w postaci:

$$C = K \cdot R^{D-d}, \quad (8)$$

gdzie K to pewna stała, charakterystyczna dla danego materiału i sposobu rozdrabniania.

Powierzchnia kuli o promieniu R wynosi $4\pi R^2$, natomiast powierzchnia inicjatora jest proporcjonalna do R^2 (C we wzorze (8) wyrażone jest jako wielokrotność zawartości inicjatora), więc współczynnik kulistości ziarna (stosunek powierzchni rzeczywistej ziarna do powierzchni kuli o tej samej średnicy) jest wprost proporcjonalny do wielkości C ze wzoru (8). Dla ziaren, które mają własność fraktalu powierzchniowego, ale nie są fraktalem objętościowym $2 \leq D < 3$ ($D=2$ odpowiada powierzchni euklidesowej) i $d=2$. Jeśli dysponujemy kilkoma frakcjami danego materiału o różnym uziarnieniu i mamy możliwość wyznaczenia współczynnika kulistości ziaren W , to można sprawdzić, czy powierzchnia ziarna ma charakter fraktalu czy nie (jeśli nie, to W powinno być niezależne od R), a jeśli stwierdzimy zależność W od R , to kreśląc zależność $\log(W)$ od $\log(R)$, możemy wyznaczyć D . Własności układów rozdrobnionych odnosimy zwykle nie do jednego ziarna, a do jednostkowej masy ziaren (np. do 1 g). Dla ziaren, które są fraktalem powierzchniowym o wymiarze fraktalnym D , ale nie objętościowym (wymiar fraktalny objętości równy wymiarowi topologicznemu), ilość ziaren zawartych w jednostce masy jest proporcjonalna do R^{-3} . Powierzchnia właściwa proszku będzie więc wprost proporcjonalna do promienia tworzących go ziaren, podniesionego do potęgi $D-3$:

$$A \approx n \approx R^{D-3}, \quad (9)$$

gdzie A to powierzchnia właściwa wyrażona w m^2/g a n w molach adsorbentu na gram. Wykonując wykres $\log(A)$ od $\log(R)$ powinno się otrzymać prostą o nachyleniu -1 , jeśli powierzchnia ziaren nie ma charakteru fraktalnego (wówczas $D=2$) lub prostą o nachyleniu $D-3$ (pomiędzy -1 a 0) dla powierzchni fraktalnych. Przykładowe wykresy takich zależności dla kilku różnych skał węglanowych (główne składniki: wapienie i dolomity) przedstawiono na rysunku 6. Jak widać, obserwuje się różne wartości D , od bliskiej 2 do bliskiej 3, dla wszystkich jednak przypadków zależność wyrażona wzorem (9) jest spełniona. Można równocześnie zauważyć, że wyższym wartościom D odpowiadają wyższe wartości powierzchni właściwej (rys. 7) – jest to zrozumiałe, jeśli porówna się dwa fraktale o podobnej budowie, ale różnym D , np. krzywe von Kocha z rys. 1f i 5. Oczywiście tak wyznaczony wymiar fraktalny D obowiązuje jedynie dla zakresu nierówności powierzchni $R_{\min} < R < R_{\max}$, gdzie $R_{\min}$ i $R_{\max}$ to promienie najmniejszych i największych ziaren użytych w pomiarach powierzchni właściwej proszku. Jeśli ziarno jest fraktalem objętościowym (wykazuje porowatość o charakterze fraktalnym), to jego masa (w odniesieniu do masy inicjatora fraktalu) zmienia się wraz z promieniem jak R^{D-3} . Ponieważ dla takich ziaren $D < 3$, to gęstość pojedynczego ziarna wzrasta wraz ze wzrostem rozdrobnienia proszku – jest to zrozumiałe, ponieważ pękanie ziaren w trakcie mielenia będzie zachodziło głównie wzdłuż porów, uwalniając przede wszystkim pustą przestrzeń wewnętrzną. Dla ziaren, które są zarówno fraktalem objętościowym jak i powierzchniowym, wzór (9) należy zmodyfikować do postaci:

$$A \approx R^{D_f - D_m}, \quad (10)$$

gdzie D_r - to wymiar fraktalny fraktalu powierzchniowego, a D_m - wymiar fraktalny fraktalu objętościowego. Wzór (10) obowiązuje oczywiście dla przypadku, gdy A wyrażamy w m^2/g - gdybyśmy odnieśli A do jednostki objętości proszku, to również dla fraktalu powierzchniowego obowiązuje wzór (9).

Najczęściej stosowaną, a równocześnie najdokładniejszą metodą wyznaczania powierzchni właściwej proszków jest metoda polegająca na pomiarze ilości gazu zaadsorbowanego na powierzchni w warunkach, w których można oczekiwać, że cała powierzchnia pokryta jest monowarstwą zaadsorbowanych cząsteczek gazu. Od dawna wiadomo, że wielkość wyznaczonej tą metodą powierzchni właściwej zależy od powierzchni przekroju cząsteczki użytego gazu. Matematyczną postać tej zależności można otrzymać wykorzystując ponownie wzór (7). Jeśli za liniowy wymiar najmniejszych nierówności powierzchni przyjmimy promień cząsteczki (nierówności mniejsze nie będą odgrywały żadnej roli), to dla stałego R (ilość ziaren na 1 gram proszku jest stała dla stałego R) otrzymamy:

$$n = K \cdot \sigma^{-D/2}, \quad (11)$$

gdzie n to ilość moli adsorbentu na 1 gram adsorbentu, σ to przekrój cząsteczki, a K stała proporcjonalności. Stała ta jest charakterystyczna dla danego adsorbentu. Dla powierzchni właściwej otrzymujemy wzór:

$$A = A_v \cdot K \cdot \sigma^{(2-D)/2}, \quad (12)$$

gdzie A_v to liczba Avogadro. Wzór ten sprawdzono dla bardzo wielu adsorbentów (2, 3, 4) i stwierdzono doskonałą zgodność otrzymanych wyników z teorią, w szerokim zakresie wielkości ziaren (od mikronowych do milimetrowych). Stosując polimery o różnym ciężarze cząsteczkowym (4) sprawdzono, że wzór stosuje się również w szerokim zakresie promienia cząsteczki adsorbentu. Jak wynika ze wzoru (12), dla $D > 2$ zmierzona powierzchnia właściwa zależy od powierzchni przekroju cząsteczki. Jeśli więc wymiar fraktalny powierzchni adsorbentu różny jest od 2, to przyjęcie w obliczeniach stopnia pokrycia powierzchni substancją zaadsorbowaną wartości powierzchni właściwej otrzymanej z pomiarów adsorpcji np. azotu może prowadzić do poważnych błędów, gdy przekrój cząsteczki zaadsorbowanej różni się od przekroju cząsteczki użytej do wyznaczenia powierzchni właściwej (np. azotu). Dla większości próbek opisanych w literaturze znaleziono $2 < D < 3$. $D=2$ znaleziono dla niewielu adsorbentów, w tym dla grafitu, co jest zrozumiałe, gdyż materiał ten ma strukturę warstwową i w trakcie rozdrabniania odsłania duże płaszczyzny gładkie na poziomie molekularnym. Materiały porowate charakteryzują się oczywiście wartością D bliską 3.

Przedstawione powyżej zależności matematyczne sformułowane zostały pod kątem opisu procesu rozdrabniania, ale w znacznej mierze dotyczą one również procesu aglomeracji. Dla wielu rodzajów aglomeratów (8) znaleziono wymiar fraktalny $1 < D < 3$, można więc i w tym przypadku zastosować do ich opisu zaprezentowany powyżej aparat matematyczny.

4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono podstawy geometrii fraktalnej, nowego działu matematyki, który dostarcza modeli matematycznych do opisu obiektów wykazujących znaczne nieregularności geometryczne i może znaleźć zastosowanie w teorii procesów przeróbki kopalin. Wszystkie przedstawione przykłady prezentowały tzw. fraktale deterministyczne, to znaczy fraktale, dla których można podać dokładny algorytm ich konstrukcji. W opisie bardziej złożonych układów stosuje się zwykle tak zwane fraktale probabilistyczne - w tym przypadku dobudowywanie kolejnych elementów fraktalu następuje w sposób losowy. Do fraktali takich stosują się te same wzory co do fraktali deterministycznych, ale w sensie statystycznym, tzn. z pewnym określonym prawdopodobieństwem i wyłącznie w odniesieniu do dostatecznie licznych zbiorów elementów. Jak już powyżej wspomniano, "prawdziwy" fraktal otrzymuje się wtedy, gdy proces budowy fraktalu prowadzi się nieskończenie długo. W przypadku obiektów rzeczywistych taki proces musi zaczynać i kończyć się na określonym etapie. W związku z tym występuje zawsze tak zwane górne i dolne ograniczenie, a badany system wykazuje zachowanie fraktalne w pewnych określonych granicach. Zagadnienie to omówione zostało szerzej w pracy Pfeifera (6). Należy tu podkreślić, że obiekty o strukturze fraktali występują powszechnie w przyrodzie - jako typowy przykład może tu służyć....kalafior. Również takie obiekty, jak chmury, płatki śniegu, gałęzie drzew mają strukturę fraktalu, stąd bardzo szerokie zastosowanie teorii fraktali do opisu tego typu obiektów.

5. LITERATURA

1. Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.
2. Avnir, D., *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, J.Wiley, New York, 1989.
3. Pfeifer, P., Avnir, D., *J. Chem. Phys.*, 79, 3558 (1983)
4. Avnir, D., Farin, D., Pfeifer, P., *J. Chem. Phys.*, 79, 3566 (1983)
5. Avnir, D., Farin, D., Pfeifer, P., *J. Coll. Int. Sci.*, 103, 112 (1985)
6. Pfeifer, P., *Appl. Surf. Sci.*, 18, 146 (1984)
7. Neymark, A.V., *Zhurnal Fiz. Khim.*, 64, 2593 (1990)
8. Quing Jing, Logan, B.E., *Environmental Sci. Technol.*, 25, 2031 (1991)
9. Love, K.S., Whittaker, C.W., *Agr. Food Chem.*, 2, 1268 (1954)

Nowak P., 1992. Fractal theory - a new method of the description of irregular objects, *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 25; 13 - 24 (Polish text).

Fractals are the objects which show irregularities at any magnification and may not be described by Euclidean geometry. In the article the theory of fractals is shortly reviewed and the possibilities of using fractals in the description of mineral processing is presented on the basis of examples from the literature.